



# Étude de problèmes de diffusion inverse à énergie fixée pour des variétés asymptotiquement hyperboliques

Damien Gobin

## ► To cite this version:

Damien Gobin. Étude de problèmes de diffusion inverse à énergie fixée pour des variétés asymptotiquement hyperboliques. Equations aux dérivées partielles [math.AP]. Université de Nantes, 2016. Français. NNT: . tel-01340934

**HAL Id: tel-01340934**

**<https://hal.science/tel-01340934>**

Submitted on 2 Jul 2016

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

# Thèse de Doctorat

Damien GOBIN

*Mémoire présenté en vue de l'obtention du  
grade de Docteur de l'Université de Nantes  
sous le sceau de l'Université Bretagne Loire*

École doctorale : Sciences et technologies de l'information, et mathématiques

Discipline : Mathématiques et leurs interactions, section CNU 25, 26

Unité de recherche : Laboratoire de Mathématiques Jean Leray (LMJL)

Soutenue le 28 Juin 2016

## Étude de problèmes de diffusion inverse à énergie fixée pour des variétés asymptotiquement hyperboliques

### JURY

Président : **M. Otared KAVIAN**, Professeur des universités, Université de Versailles Saint-Quentin-en-Yvelines

Rapporteur : **M. David DOS SANTOS FERREIRA**, Professeur des universités, Université de Lorraine

Examineurs : **M. Roman NOVIKOV**, Directeur de recherche au CNRS, École Polytechnique  
**M. Georgi POPOV**, Professeur des universités, Université de Nantes  
**M. Éric SOCCORSI**, Maître de conférences titulaire de l'HDR, Université d'Aix-Marseille

Directeur de thèse : **M. François NICOLEAU**, Maître de conférences titulaire de l'HDR, Université de Nantes

Co-encadrant de thèse : **M. Thierry DAUDÉ**, Maître de conférences, Université de Cergy-Pontoise

\* \* \*

Rapporteur : **M. Hiroshi ISOZAKI**, Professeur, University of Tsukuba



# Remerciements

De nombreuses personnes méritent d'être mentionnées ici et je vais essayer d'en oublier le moins possible. Je veux tout d'abord remercier mes directeurs de thèse François Nicoleau et Thierry Daudé pour m'avoir fait confiance et m'avoir proposé ce sujet de thèse passionnant. Je tiens à vous remercier pour l'ambiance de travail décontractée mais sérieuse que vous avez instaurée entre nous durant ces trois années, pour avoir toujours su être présents et me relancer lors des périodes un peu plus difficiles, pour les réponses à mes nombreuses questions parfois naïves, pour avoir relu mes notes avec minutie, pour m'avoir laissé libre de mes choix mathématiques tout en me proposant constamment de nouvelles pistes ainsi que pour m'avoir fait voyager aussi bien géographiquement que mathématiquement. Si ces trois ans ont été pour moi une expérience fantastique c'est en grande partie grâce à vous et je vous en remercie infiniment. Je tiens également à remercier Niky Kamran pour m'avoir invité et très gentiment accueilli à Montréal et m'avoir ainsi permis de vivre une expérience très enrichissante. Merci surtout de m'offrir l'opportunité de faire un postdoc l'année prochaine avec toi, j'ai hâte que l'on puisse commencer à travailler ensemble.

Merci à David Dos Santos Ferreira et Hiroshi Isozaki d'avoir accepté d'être rapporteurs de cette thèse. Je vous remercie pour vos précieux commentaires ainsi que pour vos suggestions qui ouvrent de nouvelles perspectives. Je tiens également à remercier les membres du jury de m'avoir fait l'honneur d'accepter mon invitation : Otared Kavian, Roman Novikov, Georgi Popov et Éric Soccorsi. Je voudrais en particulier remercier Georgi Popov pour sa grande gentillesse et son aide dans un problème de dernière minute ainsi que Yavar Kian et Éric Soccorsi pour m'avoir invité à Marseille et m'avoir aidé à monter un dossier de demande de postdoc. J'espère que nous aurons malgré tout l'occasion de travailler ensemble.

Je tiens ensuite à remercier tous les membres du Laboratoire de Mathématiques Jean Leray. J'achève par cette thèse neuf ans de présence à l'Université de Nantes et il y a donc beaucoup de personnes que j'aimerais mentionner. Tout d'abord je tiens à remercier

---

Jean-François Coulombel, Frédéric Bernicot et Benoît Grébert pour avoir pris le temps il y a trois ans de m'expliquer les sujets de thèse qu'ils proposaient et qui avaient tous l'air très intéressants. Je tiens grandement à remercier Gilles Carron pour avoir largement contribué à mon parcours universitaire puisqu'il m'a enseigné tous les ans depuis mon arrivée ici. Merci d'avoir été disponible pour répondre à mes questions avant et pendant ma thèse et de m'avoir constamment encouragé. Je veux également remercier Samuel Tapie pour sa gentillesse et ses bons conseils, Joe Viola pour m'avoir aidé à répondre à une question technique durant ma thèse et m'avoir proposé de faire un exposé au séminaire, Jean-Marc Patin pour avoir été très présent durant mes années universitaires et avoir contribué à mon envie de faire une thèse, Friedrich Wagemann et Éric Paturel pour leur grande sympathie et Laurent Thomann pour l'intérêt qu'il a porté à mes travaux ainsi que pour sa gentillesse et son soutien permanent. Je tiens aussi à remercier des personnes avec qui je n'ai pas eu l'occasion de travailler mais qui ont toujours eu un mot gentil : Nicolas Pétrélis, Anne Philippe et François Jauberteau, pour ne citer qu'eux. Je souhaite également remercier les personnes avec qui j'ai eu l'occasion d'enseigner durant ces trois ans et qui m'ont permis d'apprécier cette expérience : Robert Petit, Abdesslam Boulkhemair, Xue-Ping Wang, Laurent Piriou et Jean-Louis Milhorat. Enfin, je tiens grandement à remercier le personnel du laboratoire à commencer par Brigitte Joubert dont la patience et la gentillesse n'ont pas de limite. Je remercie également Stéphanie Benoit, Annick Egurbide, Anaïs Goulian et Katrin Schlau pour leur disponibilité et leur compréhension face à mes difficultés administratives. Merci également à Claude dont la bonne humeur est un régal et à notre voisin de bureau Serge Cormier dont la musique aura bercé nos matinées.

Je souhaite également remercier tous les doctorants du laboratoire qui ont partagé ces trois années avec moi. Merci à Christophe de nous avoir accueilli à bras ouvert à notre arrivée au laboratoire et de nous avoir fait rire durant deux ans, à Virgile pour un certain dîner de conf à Roscoff qui me restera longtemps en mémoire, à Antoine pour ses bons conseils et pour avoir supporté mes blagues sur la rédaction sans s'être vengé cette année, à Thomas G pour les parties de taroinche endiablées et à Moudhaffar pour les parties de billard et pour être toujours prêt à rendre service. Je tiens particulièrement à remercier Ilaria pour les nombreuses discussions que nous avons eues, mathématiques ou non, et pour le soutien qu'elle m'a apporté pendant cette thèse. J'en profite pour te féliciter pour ton poste, tu vas maintenant pouvoir mettre en œuvre toutes les idées que l'on partage sur le monde de la recherche. Merci Florian d'être au moins aussi facile à corrompre que moi et pour les bières que l'on a bues ensemble durant ces trois ans, Victor M-D pour la discrétion de ton rire et ton amour de la raclette et de tout ce qui s'en approche de près

---

ou de loin, Vytautė pour ta bonne humeur constante et tes gâteaux lituaniens, Victor VDR pour ta gentillesse et pour ta capacité à mettre des jeans qui te mettent en valeur, Olivier pour ton humour décapant et pour cette danse que tu m’as offerte lors d’une soirée mémorable, Guillaume pour ton amour des mathématiques et des crêperies, Caroline pour ta bonne humeur communicative, Noémie pour ta capacité à nous faire croire que nos blagues sont drôles alors que ce n’est pas le cas, Hala pour ton éternel sourire dans les couloirs, Thomas B pour les parties de palets et de fléchettes du dimanche après-midi ainsi que pour les discussions passionnantes que nous avons pu avoir et Thomas W pour les parties de moto, les matchs de hand et surtout pour avoir partagé avec moi certaines conférences et certaines bières ainsi que pour cet humour qui t’appartient mais qui fait tant de bien lors d’une journée difficile. Il convient ensuite de remercier les derniers arrivés qui ont donné à cette troisième année qui s’achève une tournure très agréable. Commençons par la team “Houllala le week end”. Tout d’abord merci à Zoé pour avoir su apporter ta touche à l’équipe des doctorants, pour les nombreuses invitations chez toi et pour tous les bons moments de cette année, à Simon pour les parties de squash à suspense, pour les nombreuses soirées que nous avons passées ensemble et pour les réveils difficiles et à Niccolò et Camille pour avoir apporté leur bonne humeur et pour une partie de cochon mémorable. Merci également à Claire et Guillem pour votre accent chantant du sud et votre joie de vivre communicative. Je tiens ensuite à remercier Johan qui n’est pas tout à fait nantais mais dont l’absence dans ces remerciements serait une grossière erreur. Je ne peux pas te remercier pour tout ce que l’on a partagé durant ces trois ans mais je pense que si le marché de la bière et du saucisson se porte bien c’est un peu grâce à nous. Je te souhaite le meilleur pour la suite. Enfin, comment ne pas remercier mes deux co-bureaux Pierre et Valentin. Nous avons partagé durant ces trois ans dans le bureau 9 des fous rires innombrables pour des raisons qui n’ont sûrement pas leur place ici. On a commencé cette thèse ensemble il y a trois ans et l’on part ensemble chacun dans une direction différente. Je vous souhaite le meilleur pour vos soutenances et pour la suite. Vous êtes bien plus que des co-bureaux, vous avez fait de ces trois ans une expérience géniale et pour ça je vous dis merci.

Enfin il est particulièrement important pour moi de remercier les personnes qui n’ont pas de lien avec le laboratoire mais qui ont malgré tout eu un rôle important durant ces trois années. En premier lieu je voudrais remercier mes parents et mon frère pour m’avoir accompagné dans cette aventure en m’apportant un soutien constant et avoir toujours respecté mes choix. C’est surtout grâce à vous si j’en suis là aujourd’hui et pour ça je ne vous remercierai jamais assez. Merci ensuite à tous mes amis qui m’ont fait passer un nombre incalculable de bons moments. Merci à Claudie pour son soutien permanent et

---

ses réponses aux messages toujours très rapides, à Émilien pour m'avoir montré l'exemple que ce soit pour la soutenance et pour le pot, je ferai de mon mieux mais tu as mis la barre très haut, à Alex pour m'avoir accueilli à Paris lors des quelques week-ends où j'ai eu la chance de venir pour voir. Merci également à Leïla, Mathilde, Elsa et Maxime pour les soirées et les vacances que nous avons passées ensemble et pour celles que nous passerons à l'avenir. Merci à Margot qui m'a supporté dans tous les sens du terme et qui m'a permis de garder la motivation et de me changer les idées dans les moments un peu plus difficiles. Ton soutien m'a été particulièrement précieux. Merci pour tout. Merci aussi à mes amis de longue date Matthieu, Yoann, JB, Ronan et Adeline car même si nos chemins se sont éloignés je me fais toujours une joie de vous retrouver. Un petit mot pour finir pour remercier ceux que je n'ai pas cités plus haut et qui auraient mérité leur place dans ces quelques lignes. Merci à vous aussi.

# Table des matières

Introduction . . . . .	11
<b>1 Problème inverse local à énergie fixée</b>	<b>31</b>
1.1 Introduction et présentation des résultats . . . . .	32
1.2 Modèle . . . . .	42
1.2.1 Formalisme pour l'équation de Dirac sans masse . . . . .	43
1.2.2 Équation de Dirac sur une VAHSS . . . . .	44
1.3 Diffusion stationnaire . . . . .	47
1.4 Preuves des résultats principaux . . . . .	55
1.4.1 Preuve du Théorème 1.1.3, $(i) \Rightarrow (ii)$ . . . . .	55
1.4.2 Preuve du Théorème 1.1.3, $(ii) \Rightarrow (i)$ . . . . .	63
1.4.3 Preuve du Théorème 1.1.3, $(iii) \Leftrightarrow (iv)$ . . . . .	64
1.4.4 Preuve du Théorème 1.1.5. . . . .	67
1.5 Application aux trous noirs de type RN-dS . . . . .	68
1.5.1 Trous noirs de type Reissner-Nordström-de Sitter . . . . .	68
1.5.2 Équation de Dirac dans un trou noir de type RN-dS . . . . .	70
1.5.3 Unicité des paramètres . . . . .	71
1.6 Reformulation des résultats principaux . . . . .	72
1.7 Addendum : les coefficients de transmission . . . . .	74
<b>2 Problème inverse dans des trous noirs</b>	<b>83</b>
2.1 Introduction et résultat principal . . . . .	84
2.1.1 Trous noirs de type Reissner-Nordström-de Sitter . . . . .	86
2.1.2 Matrice de diffusion et présentation du résultat . . . . .	88
2.1.3 Aperçu de la preuve . . . . .	92
2.2 Problème de diffusion directe . . . . .	98
2.2.1 Équation de Dirac et les résultats de diffusion directe . . . . .	99
2.3 Réduction du modèle et première analyse . . . . .	103



2.3.1	Premières simplifications . . . . .	103
2.3.2	Équations différentielles d'ordre deux pour les fonctions de Jost . .	108
2.4	Asymptotiques en le moment angulaire . . . . .	113
2.4.1	Variable de Liouville et équations de Bessel . . . . .	113
2.4.2	Estimations du noyau de Green et des fonctions de Jost . . . . .	118
2.4.3	Asymptotiques des fonctions de Jost à droite lorsque $X \rightarrow 0$ . . . .	124
2.4.4	Amélioration des estimations des fonctions de Jost . . . . .	130
2.4.5	Asymptotiques des fonctions de Jost à droite pour $z$ grand dans le plan complexe . . . . .	137
2.4.6	Asymptotiques des fonctions de Jost à gauche pour $z$ grand dans le plan complexe . . . . .	141
2.4.7	Asymptotiques de la matrice des données de diffusion . . . . .	143
2.5	Complexification du Moment Angulaire . . . . .	148
2.5.1	Propriétés d'analyticité des fonctions de Jost et de la matrice des données de diffusion . . . . .	148
2.5.2	Classe de Nevanlinna et résultat d'unicité . . . . .	149
2.6	Preuve du Théorème principal . . . . .	151
2.6.1	Étude de la matrice $P$ . . . . .	153
2.6.2	Preuve du Théorème 2.1.1 sous l'hypothèse (i) . . . . .	158
2.6.3	Preuve du Théorème 2.1.1 sous l'hypothèse (ii) . . . . .	161
<b>3</b>	<b>Problème inverse à énergie fixée : variétés de Stäckel</b>	<b>165</b>
3.1	Introduction et présentation du résultat . . . . .	166
3.1.1	Rappels sur la théorie de séparation des variables . . . . .	168
3.1.2	Description du modèle . . . . .	175
3.1.3	Structure asymptotiquement hyperbolique et exemples . . . . .	179
3.1.4	Opérateur de diffusion et présentation du résultat . . . . .	187
3.1.5	Aperçu de la preuve . . . . .	193
3.2	Problème direct . . . . .	202
3.2.1	Séparation des variables pour l'équation de Helmholtz . . . . .	202
3.2.2	Première construction de la fonction caractéristique et de la fonction de Weyl-Titchmarsh . . . . .	215
3.2.3	Lien entre les coefficients de diffusion et les fonctions caractéristique et de Weyl-Titchmarsh . . . . .	219
3.2.4	Deuxième construction des fonctions caractéristique et de Weyl- Titchmarsh . . . . .	222

3.2.5	Troisième construction des fonctions caractéristique et de Weyl-Titchmarsh et application . . . . .	224
3.3	Problème inverse à énergie fixée pour les équations angulaires . . . . .	227
3.3.1	Première réduction et premier résultat d'unicité . . . . .	227
3.3.2	Fin du problème inverse pour la partie angulaire . . . . .	229
3.4	Problème inverse à énergie fixée pour l'équation radiale . . . . .	233
3.4.1	Complexification des moments angulaires . . . . .	233
3.4.2	Problème inverse pour la partie radiale . . . . .	239
3.5	Résolution du problème inverse . . . . .	242
3.6	Appendices . . . . .	243
3.6.1	Preuve de la Proposition 3.1.17 . . . . .	243
3.6.2	Preuve du Lemme 3.4.6 . . . . .	248
3.6.3	Preuve du Lemme 3.4.8 . . . . .	256
<b>Bibliographie</b>		<b>275</b>



# Introduction

Cette thèse a pour objet l'étude de problèmes de diffusion inverse à énergie fixée. Lorsque l'on s'intéresse à ce genre de questions on commence par considérer des champs se propageant dans une certaine géométrie ou un certain milieu dépendant de paramètres physiques et satisfaisant une certaine équation d'évolution. Selon le problème étudié, cette équation peut être, par exemple, l'équation de Schrödinger (diffusion quantique), l'équation des ondes scalaire (diffusion acoustique) ou encore les équations de Maxwell (diffusion électromagnétique). La théorie de la diffusion directe consiste alors à étudier la propagation de ces champs et leur comportement asymptotique en temps. Plus précisément, on s'intéresse à la partie de ces champs qui "diffuse", c'est-à-dire à la partie qui ne reste pas confinée dans un compact mais qui s'échappe dans des régions asymptotiques. L'idée de la théorie de la diffusion est alors basée sur le fait que, dans un passé ou un futur lointain, les ondes diffusées seront localisées dans ces régions asymptotiques où les équations (ou la géométrie) deviennent souvent plus simples. Le but de cette théorie est alors de caractériser ces équations simplifiées, et ainsi de comparer les données d'un passé lointain avec celles d'un futur lointain, en utilisant les paramètres physiques du système. La théorie de la diffusion inverse consiste quant à elle à identifier la géométrie ou les paramètres physiques du système à partir des données de diffusion, c'est-à-dire, à partir de la connaissance du comportement des ondes dans les régions asymptotiques. Cette question est au cœur de notre vie de tous les jours puisque notre cerveau lui-même utilise cette méthode afin de nous fournir une image en trois dimensions du monde qui nous entoure à partir de la mesure des rayons lumineux diffusés qui atteignent notre rétine. De plus, nous ne sommes pas les seuls êtres vivants à y avoir recours puisque les dauphins et les chauves-souris sont quant à eux capable d'obtenir une représentation de leur environnement en analysant la diffusion d'ondes acoustiques. Mais ce n'est pas tout. En effet, la diffusion inverse constitue également le moyen grâce auquel nous avons obtenu la plupart de nos connaissances sur le monde dans lequel nous vivons. Nous avons par exemple obtenu des informations sur la structure de la Terre en mesurant le

temps de trajet des ondes sismiques. Nous avons également découvert la structure en hélice de l'ADN en étudiant la diffusion de rayons X ou encore celle d'un atome et ses constituants à partir de l'étude de la diffusion de particules bombardées sur ce dernier. La compréhension des phénomènes de diffusion inverse est en outre un enjeu technologique de premier plan : si leur étude a, par exemple, joué un rôle majeur durant la seconde guerre mondiale dans le développement du radar, elle reste une question d'un très grand intérêt de nos jours. En effet, les techniques d'imagerie médicale actuelles utilisent la diffusion de rayons X, d'ondes ultrasons et d'ondes électromagnétiques pour obtenir des images du corps humain qui sont d'une grande aide dans l'obtention de diagnostics médicaux. L'industrie du pétrole utilise quant à elle la réflexion des ondes sismiques pour mettre en évidence la présence de pétrole et ainsi éviter un forage à l'aveugle. Enfin, la diffusion inverse propose également une méthode non destructive pour trouver des fuites ou détecter la présence de corrosion dans des tuyaux souterrains.

En résumé, le but de la théorie de la diffusion directe est de déterminer la relation entre les ondes entrantes et les ondes sortantes à l'aide de la connaissance de la géométrie et des paramètres physiques du système. Le but de la théorie de la diffusion inverse est, à l'inverse, de déterminer la géométrie et les paramètres physiques du système en supposant connu le lien entre ces ondes. Lorsque l'on travaille sur des variétés compactes à bord l'objet essentiel de l'étude du problème inverse est l'opérateur de Dirichlet-Neumann. Cet opérateur encode le lien entre les données entrantes et les données sortantes mesurées sur le bord. En revanche pour des variétés non compactes à bouts, l'objet qui encode le lien entre la dynamique des ondes entrantes et celle des ondes sortantes est l'opérateur de diffusion  $S_g$  qui dépend de la géométrie du problème et donc d'une métrique  $g$ . La restriction de l'opérateur de diffusion aux ondes d'énergie  $\lambda \in \mathbb{R}$  nous permet alors de définir la matrice de diffusion  $S_g(\lambda)$ . Dans le domaine des problèmes inverses plusieurs questions se posent alors. Étant donné une énergie fixée  $\lambda \in \mathbb{R}$ , nous sommes par exemple intéressés par les questions suivantes :

- Unicité : Si  $S_g(\lambda) = S_{\tilde{g}}(\lambda)$  est-ce-que  $g = \tilde{g}$  ?
- Stabilité : Si  $S_g(\lambda) = S_{\tilde{g}}(\lambda) + \text{erreur}$  est-ce que  $g = \tilde{g} + \text{erreur}$  ?
- Reconstruction : Existe-t-il une procédure pour reconstruire  $g$  à partir de  $S_g(\lambda)$  ?

Dans cette thèse nous nous intéressons à la résolution de problèmes d'unicité à énergie fixée pour différents types de géométries ayant plus ou moins de symétries. Les questions de diffusion inverse à énergie fixée sont d'une grande importance dans le domaine des problèmes inverses car elles sont étroitement liées à la résolution du problème de Calderón

anisotrope pour des variétés riemanniennes compactes à bord. Rappelons brièvement l'historique de ce problème. Dans les années 40, A. P. Calderón était un ingénieur argentin travaillant pour l'entreprise Yacimientos Petrolíferos Fiscales et intéressé par la prospection de pétrole. Ceci l'a amené, dans les années 80, à énoncé dans l'article [Cal80] intitulé “On an inverse boundary value problem” la question suivante :

*Peut-on déterminer les propriétés électriques d'un milieu par des mesures sur son bord ?*

Pour tenter de répondre à cette question on excite le milieu, ici un ouvert borné de  $\mathbb{R}^n$ , à l'aide d'une donnée de Dirichlet sur son bord et on mesure la dérivée normale au bord de la solution de l'équation de conductivité correspondante (donnée de Neumann). On définit alors l'opérateur de Dirichlet-Neumann comme étant l'objet encodant cette opération. Le problème de Calderón peut alors être reformulé de la façon suivante :

*Peut-on déterminer la conductivité  $\gamma$  du milieu à partir de la connaissance de l'opérateur de Dirichlet-Neumann  $\Lambda_\gamma$  ?*

Plus généralement, on est amené à considérer des problèmes inverses anisotropes où le milieu est une variété riemannienne compacte à bord munie d'une métrique  $g$  qui modélise une conductivité anisotrope. Le problème de Calderón anisotrope s'énonce alors :

*Peut-on déterminer la métrique  $g$  d'une variété riemannienne compacte à bord à partir de la connaissance de l'opérateur de Dirichlet-Neumann  $\Lambda_g$  ?*

Cette question a été largement étudiée depuis les années 80 mais reste à ce jour ouverte. En effet, elle est résolue en dimension deux mais sa solution n'est pour l'instant connue en dimensions supérieures que pour des métriques analytiques réelles, des variétés de type Einstein et des variétés possédant une certaine structure de produit tordu. On renvoie à [GT13, IK14, KKL01, KS14, Sal13, Uhl09] pour un état de l'art sur ce problème. Cette question est de premier intérêt en imagerie médicale car elle fournit, par exemple, un moyen de détecter la présence de tumeurs (qui ont une conductivité différente de celle des tissus sains) à partir de mesures non invasives (quelques mA).

Le premier travail de cette thèse concerne l'obtention d'un résultat d'unicité locale à énergie fixée pour des Variétés Asymptotiquement Hyperboliques et à Symétrie Sphérique (notées VAHSS). Une VAHSS est décrite par l'ensemble

$$\Sigma = \mathbb{R}_x \times \mathbb{S}_{\theta, \varphi}^2,$$

équipé de la métrique riemannienne

$$\sigma = dx^2 + a(x)^{-2} d\omega^2,$$

où  $d\omega^2 = d\theta^2 + \sin^2(\theta)d\varphi^2$  est la métrique euclidienne sur la sphère de dimension deux  $\mathbb{S}^2$ . On fait les hypothèses suivantes sur la fonction  $a(x)$  :

$$a \in C^2(\mathbb{R}), \quad a > 0,$$

et

$$\begin{aligned} \exists a_{\pm} > 0, \quad \kappa_+ < 0, \quad \kappa_- > 0, \quad & \begin{aligned} a(x) &= a_{\pm}e^{\kappa_{\pm}x} + O(e^{3\kappa_{\pm}x}), & x \rightarrow \pm\infty, \\ a'(x) &= a_{\pm}\kappa_{\pm}e^{\kappa_{\pm}x} + O(e^{3\kappa_{\pm}x}), & x \rightarrow \pm\infty. \end{aligned} \end{aligned}$$

Sous ces hypothèses,  $(\Sigma, \sigma)$  est une variété riemannienne à symétrie sphérique ayant deux bouts asymptotiquement hyperboliques  $\{x = \pm\infty\}$ . On note en effet que la métrique  $\sigma$  est asymptotiquement une petite perturbation des métriques hyperboliques

$$\sigma_{\pm} = dx^2 + e^{-2\kappa_{\pm}x}d\omega_{\pm}^2, \quad x \rightarrow \pm\infty,$$

où  $d\omega_{\pm}^2 = 1/(a_{\pm}^2)d\omega^2$  sont des métriques sur  $\mathbb{S}^2$ . On remarque ainsi que la courbure sectionnelle de  $\sigma$  tend vers la constante négative  $-(\kappa_{\pm})^2$  au bout correspondant  $\{x = \pm\infty\}$ . D'où le nom de variété “asymptotiquement hyperbolique” pour ce type de géométrie. On note que l'on autorise  $\kappa_-$  et  $\kappa_+$  à prendre des valeurs différentes ce qui donne lieu à des courbures sectionnelles différentes aux deux bouts.

Sur la variété  $(\Sigma, \sigma)$ , on est alors intéressé par l'étude de la propagation d'ondes (scalaires, électromagnétiques, de Dirac, ...) et de leur diffusion en temps longs afin de répondre à la question suivante :

*Peut-on déterminer la métrique en observant ces ondes à l'infini (dans notre modèle les deux bouts  $\{x = \pm\infty\}$ ) ?*

On étudie ainsi comment des champs de Dirac non massifs et non chargés se propagent et sont diffusés dans les deux bouts asymptotiquement hyperboliques. Ces champs satisfont l'équation d'évolution

$$i\partial_t\psi = \mathbb{D}_{\sigma}\psi,$$

où  $\mathbb{D}_{\sigma}$  désigne une représentation de l'opérateur de Dirac sur  $(\Sigma, \sigma)$  et le 2-spineur solution  $\psi$  appartient à  $L^2(\Sigma; \mathbb{C}^2)$ . Nous montrerons qu'il existe un lien très simple entre  $\mathbb{D}_{\sigma}$  et la fonction  $a(x)$  apparaissant dans la métrique  $\sigma$ . Plus précisément,

$$\mathbb{D}_{\sigma} = \Gamma^1 D_x + a(x)\mathbb{D}_{\mathbb{S}^2},$$

où  $\mathbb{D}_{\mathbb{S}^2}$  désigne l'opérateur de Dirac intrinsèque sur  $\mathbb{S}^2$ , représenté ici par l'expression

$$\mathbb{D}_{\mathbb{S}^2} = \Gamma^2 \left( D_\theta + \frac{i \cot \theta}{2} \right) + \Gamma^3 \frac{1}{\sin \theta} D_\varphi,$$

où  $D_x = -i\partial_x$ ,  $D_\theta = -i\partial_\theta$ ,  $D_\varphi = -i\partial_\varphi$  et où les matrices  $2 \times 2$  de Dirac  $\Gamma^1, \Gamma^2, \Gamma^3$  vérifient les relations d'anti-commutativité habituelles

$$\Gamma^i \Gamma^j + \Gamma^j \Gamma^i = 2\delta_{ij}.$$

En raison de la symétrie sphérique du problème et de l'existence d'harmoniques sphériques généralisées  $\{Y_{kl}\}$  qui “diagonalisent”  $\mathbb{D}_{\mathbb{S}^2}$ , on peut décomposer l'espace de Hilbert des énergies  $\mathcal{H} = L^2(\Sigma; \mathbb{C}^2)$  en une somme hilbertienne d'espaces de Hilbert partiels  $\mathcal{H}_{kl}$  qui soient invariants sous l'action de l'opérateur de Dirac  $D_\sigma$ . Plus précisément, si l'on introduit l'ensemble des indices  $I = \{k \in 1/2 + \mathbb{Z}, l \in 1/2 + \mathbb{N}, |k| \leq l\}$ , on a

$$\mathcal{H} = \bigoplus_{kl} \mathcal{H}_{kl}, \quad \mathcal{H}_{kl} = L^2(\mathbb{R}; \mathbb{C}^2) \otimes Y_{kl},$$

et

$$\mathbb{D}_\sigma^{kl} := \mathbb{D}_\sigma|_{\mathcal{H}_{kl}} = \Gamma^1 D_x - (l + 1/2)a(x)\Gamma^2.$$

On note que les opérateurs de Dirac partiels  $\mathbb{D}_\sigma^{kl}$  dépendent uniquement du moment angulaire  $l + 1/2 \in \mathbb{N}^* = \mathbb{N} \setminus \{0\}$ . Pour simplifier, on désignera  $l + \frac{1}{2}$  par  $n$  (ce nouveau paramètre parcourant l'ensemble des entiers non nuls  $\mathbb{N}^*$ ) et on désignera par

$$\mathbb{D}_\sigma^n = \Gamma^1 D_x - na(x)\Gamma^2,$$

les opérateurs de Dirac partiels sur les harmoniques sphériques généralisées  $Y_{kl}$ . On est ainsi amené à considérer la restriction de l'équation de Dirac sur chaque espace de Hilbert partiel  $\mathcal{H}_{kl}$  séparément et à étudier les propriétés de la famille des hamiltoniens de Dirac unidimensionnels  $\mathbb{D}_\sigma^n$ ,  $n \in \mathbb{N}^*$ , pour obtenir des résultats d'analyse spectrale et de diffusion directe et inverse pour le hamiltonien de Dirac complet  $\mathbb{D}_\sigma$ . Ceci a été fait dans [DN11] dans un contexte très similaire (voir aussi [AKvdM00, Dau10, DN10]). Notons que les modèles étudiés dans [DN11] viennent de la Relativité Générale comme nous le verrons plus en détails à la fin du premier chapitre puis dans le deuxième.

Le hamiltonien de Dirac  $\mathbb{D}_\sigma$  est autoadjoint sur l'espace de Hilbert  $\mathcal{H} = L^2(\Sigma; \mathbb{C}^2)$  et a un spectre absolument continu. En particulier, le spectre purement ponctuel de  $\mathbb{D}_\sigma$  est vide. Par conséquent, les champs de Dirac non-massifs diffusent vers les bouts asymptotiques



$\{x = \pm\infty\}$  de la variété  $\Sigma$  en temps longs. On établit alors une théorie de la diffusion directe complète pour  $\mathbb{D}_\sigma$  sur  $(\Sigma, \sigma)$ . Pour toute énergie  $\lambda \in \mathbb{R}$ , on note la matrice de diffusion à l'énergie  $\lambda$  par  $S(\lambda)$ . C'est un opérateur unitaire sur  $L^2(\mathbb{S}^2; \mathbb{C}^2)$  qui possède une structure de matrice  $2 \times 2$ , i.e.

$$S(\lambda) = \begin{pmatrix} T_L(\lambda) & R(\lambda) \\ L(\lambda) & T_R(\lambda) \end{pmatrix},$$

où  $T_L, T_R$  sont les opérateurs de transmission et  $R, L$  sont les opérateurs de réflexion. Les premiers mesurent la partie d'un signal d'énergie  $\lambda$  transmise d'un bout à l'autre dans une expérience de diffusion alors que les derniers mesurent la partie d'un signal d'énergie  $\lambda$  réfléchi d'un bout sur lui-même ( $\{x = -\infty\}$  pour  $L$  et  $\{x = +\infty\}$  pour  $R$ ). En raison de la symétrie sphérique du modèle, l'opérateur de diffusion laisse invariant tous les espaces de Hilbert partiels  $\mathcal{H}_{kl}$  et peut être décomposé en une somme hilbertienne d'opérateurs unitaires agissant sur  $\mathbb{C}^2$ . On écrit alors

$$S(\lambda) = \sum_{(k,l) \in I} S_{kl}(\lambda), \quad S_{kl}(\lambda) := S(\lambda)|_{\mathcal{H}_{kl}}.$$

Puisque les opérateurs de Dirac unidimensionnels  $\mathbb{D}_\sigma^n$  dépendent uniquement de  $n \in \mathbb{N}^*$ , les matrices de diffusion partielles  $S_{kl}(\lambda)$  dépendent également uniquement de  $n$ . On utilisera donc la notation

$$S(\lambda, n) = \begin{pmatrix} T(\lambda, n) & R(\lambda, n) \\ L(\lambda, n) & T(\lambda, n) \end{pmatrix}.$$

On insiste sur le fait que, pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$ , les matrices de diffusion partielles  $S(\lambda, n)$  sont des matrices unitaires qui encodent la diffusion stationnaire à une énergie fixée  $\lambda$  sur une harmonique sphérique généralisée donnée  $\mathcal{H}_{kl}$  avec  $n = l + 1/2$ . De plus, la connaissance de la matrice de diffusion  $S(\lambda)$  est équivalente à la connaissance des matrices de diffusion partielles  $S(\lambda, n)$  pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$ . Comme précédemment les coefficients de transmission  $T(\lambda, n)$  correspondent à la partie du signal transmise d'un bout à l'autre alors que les coefficients de réflexion à gauche  $L(\lambda, n)$  et à droite  $R(\lambda, n)$  correspondent à la partie du signal réfléchi d'un bout sur lui-même.

Dans [DN11], Daudé et Nicoleau posent alors la question suivante :

*Est-il possible de déterminer de façon unique la métrique  $\sigma$  à partir de la connaissance de  $L(\lambda)$  ou  $R(\lambda)$  à une énergie fixée  $\lambda \neq 0$  ?*

Ils montrent alors que la connaissance de  $L(\lambda, n)$  ou  $R(\lambda, n)$  à une énergie fixée  $\lambda \neq 0$  et pour des moments angulaires  $n$  parcourant un sous-ensemble  $\mathcal{L}$  de  $\mathbb{N}^*$  satisfaisant une condition de Müntz  $\sum_{n \in \mathcal{L}} \frac{1}{n} = +\infty$ , détermine de façon unique la fonction  $a(x)$  (et ainsi la métrique  $\sigma$ ) à un sous-ensemble discret de translation près.

Les résultats de diffusion inverse de notre premier chapitre, reprenant ceux de l'article [DGN13], constituent une version locale de ce dernier résultat et sont dans l'esprit des travaux [Ben01, GS00, Sim99, Tes09]. En effet, au lieu de supposer la connaissance exacte d'un des opérateurs de réflexion, on suppose que l'un d'eux est connu à une erreur près. On montre alors que, étant données deux VAHSS  $(\Sigma, \sigma)$  et  $(\Sigma, \tilde{\sigma})$  et une constante  $B$  telle que  $0 < B < \min(A, \tilde{A})$ , où

$$A = \int_{\mathbb{R}} a(x) dx \quad \text{et} \quad \tilde{A} = \int_{\mathbb{R}} \tilde{a}(x) dx,$$

la connaissance à une énergie fixée  $\lambda \neq 0$  des coefficients de réflexion partiels  $L(\lambda, n)$  à une erreur de taille  $O(e^{-2nB})$  près, lorsque  $n \rightarrow +\infty$ , détermine de façon unique la fonction  $a(x)$  (et donc la métrique) dans un voisinage du bout  $\{x = -\infty\}$  dont la taille dépend de la taille de l'erreur  $B$ . De façon symétrique, on montre que la connaissance à une énergie fixée  $\lambda \neq 0$  des coefficients de réflexion partiels  $R(\lambda, n)$  à une erreur de taille  $O(e^{-2nB})$  près, lorsque  $n \rightarrow +\infty$ , détermine de façon unique la fonction  $a(x)$  (et donc la métrique) dans un voisinage du bout  $\{x = +\infty\}$ . Ces résultats montrent donc que la connaissance d'un des coefficients de réflexion à une erreur près détermine de façon unique la métrique  $\sigma$  dans un voisinage du bout correspondant. On propose une interprétation possible de ce résultat d'unicité locale. Considérons par exemple les coefficients de réflexion  $L(\lambda, n)$  et rappelons qu'ils encodent l'expérience de diffusion suivante : une onde ayant une énergie  $\lambda$  est envoyée du bout  $\{x = -\infty\}$  et évolue sur une VAHSS. Alors  $L(\lambda, n)$  mesure la partie de cette onde qui est réfléchi sur le même bout  $\{x = -\infty\}$  dans un futur lointain. Notre résultat affirme que si l'on connaît  $L(\lambda, n)$  à une erreur près de la forme  $O(e^{-2nB})$ , alors la métrique est déterminée de façon unique dans un voisinage de  $\{x = -\infty\}$ , la taille du voisinage dépendant de la constante  $B$  définissant le terme d'erreur. On peut alors en déduire que, sous nos hypothèses, l'onde envoyée de  $\{x = -\infty\}$  n'a pas le temps de voyager dans toute la variété avant d'être mesurée à nouveau dans le bout  $\{x = -\infty\}$ . Ceci explique de façon heuristique pourquoi la connaissance partielle des coefficients de réflexion  $L(\lambda, n)$ , dans le sens précis donné dans nos hypothèses, n'est pas suffisante pour déterminer entièrement la métrique.

On montrera également que si le terme d'erreur est suffisamment petit on obtient l'unicité globale de la métrique.

Enfin, on cherche à utiliser le coefficient de transmission comme point de départ de notre problème inverse. On obtient alors un résultat de nature différente de celui obtenu pour les coefficients de réflexion. Tout d'abord, on doit supposer en plus de la connaissance du coefficient de transmission à une erreur près, la connaissance d'un nombre fini (mais suffisamment grand) de coefficients de réflexion. En ajoutant également une hypothèse technique sur les courbures sectionnelles  $\kappa_{\pm}$  on obtient alors un résultat d'unicité globale. On montre ainsi que, si à une énergie fixée  $\lambda \neq 0$ , pour un certain  $B > \min(A, \tilde{A})$ ,

$$T(\lambda, n) = \tilde{T}(\lambda, n) + O\left(e^{-2nB}\right), \quad n \rightarrow +\infty,$$

si

$$L(\lambda, k) = \tilde{L}(\lambda, k),$$

pour un nombre fini mais suffisamment grand (qui dépend des métriques  $\sigma$  et  $\tilde{\sigma}$ ) d'indices  $k \in \mathbb{N}$  et si

$$\frac{1}{\kappa_+} + \frac{1}{\kappa_-} < 0 \quad \text{et} \quad \frac{1}{\tilde{\kappa}_+} + \frac{1}{\tilde{\kappa}_-} < 0,$$

alors, il existe une constante  $\alpha \in \mathbb{R}$  telle que

$$\tilde{a}(x) = a(x + \alpha).$$

Par conséquent, les deux VAHSS  $(\Sigma, \sigma)$  et  $(\Sigma, \tilde{\sigma})$  coïncident à une isométrie près. On peut fournir une raison heuristique pour laquelle nous n'obtenons pas un résultat d'unicité locale lorsque l'on suppose la connaissance des coefficients de transmission à une erreur près. En effet, ces coefficients, par définition, mesurent la partie d'une onde transmise d'un bout, disons  $\{x = -\infty\}$ , à l'autre bout  $\{x = +\infty\}$ . Dans notre cas, quand les VAHSS ont seulement deux bouts, l'onde transmise a ainsi le temps de se propager dans toute la variété. Il est donc naturel que les coefficients de transmission encodent toute l'information de la VAHSS.

On note que les VAHSS que nous considérons sont des cas très particuliers d'une classe beaucoup plus large de variétés. Pour des Variétés Asymptotiquement Hyperboliques (notées VAH) sans symétries particulières, des résultats de diffusion directe et inverse pour des ondes scalaires ont été prouvés par Joshi et Sá Barreto dans [JSB00], par Sá Barreto dans [SB05], par Guillarmou et Sá Barreto dans [GSB08, GSB09] et par Isozaki et Kurolev dans [IK14]. Dans [JSB00], il est montré que les asymptotiques de la métrique d'une VAH sont déterminées de façon unique (à isométrie près) par la matrice de diffusion  $S(\lambda)$  à une énergie fixée  $\lambda$  en dehors d'un sous-ensemble discret de  $\mathbb{R}$ . Dans [SB05], il

est prouvé que la métrique d'une VAH est déterminée de façon unique (à isométrie près) par la matrice de diffusion  $S(\lambda)$  pour tout  $\lambda \in \mathbb{R}$  en dehors d'un certain sous-espace. Des résultats similaires ont été obtenus récemment dans [IK14] pour une classe encore plus générale de VAH. Dans [GSB09] il est prouvé que pour des variétés de type Einstein connexes conformément compactes de dimension paire  $n + 1$  la matrice de diffusion à l'énergie  $n$  sur un sous-ensemble ouvert de son bord conforme détermine de façon unique la variété à isométrie près. On mentionne également le travail [Mar09] de Marazzi dans lequel l'auteur étudie le problème de diffusion inverse pour l'équation de Schrödinger stationnaire sur une variété conformément compacte ayant pour courbure sectionnelle  $-\alpha^2$  au bord avec un potentiel régulier ne s'annulant pas sur ce bord. L'auteur montre alors que la connaissance de la matrice de diffusion à deux énergies fixées  $\lambda_1$  et  $\lambda_2$ ,  $\lambda_1 \neq \lambda_2$ , dans un bon sous-ensemble de  $\mathbb{C}$ , détermine de façon unique  $\alpha$  ainsi que les séries de Taylor du potentiel et de la métrique au bord. Enfin, mentionnons également [BP11] dans lequel un problème inverse à partir des résonances est étudié dans une certaine sous-classe de VAH.

Le deuxième travail de cette thèse concerne la résolution d'un problème de diffusion inverse à énergie fixée pour des géométries de type trou noir. Intuitivement, un trou noir est un objet tellement dense que son attraction gravitationnelle est si forte que l'on ne peut s'en échapper si l'on ne se déplace pas plus vite que la vitesse de la lumière. L'existence de tels objets est prédite par la théorie de la Relativité Générale introduite par Albert Einstein en 1915. Le postulat de base de la théorie de la Relativité Générale réside dans le fait que la vitesse de la lumière ne peut être dépassée. Les implications de ce postulat sont nombreuses, en particulier les notions d'espace et de temps sont en fait étroitement liées et ne forment qu'une seule entité de dimension quatre, l'espace-temps. De plus, la géométrie de cet espace-temps, c'est-à-dire la façon de mesurer les distances entre deux événements, n'est pas euclidienne mais lorentzienne. Pour rendre compte des effets de la gravitation dans ce cadre relativiste, l'idée d'Einstein a été de considérer la gravitation non plus comme une force mais comme une manifestation de la courbure de l'espace-temps. Plus précisément, l'espace-temps de la Relativité Générale est décrit par un couple  $(\mathcal{M}, g)$ , où  $\mathcal{M}$  est une variété différentielle de dimension quatre et  $g$  une métrique lorentzienne sur  $\mathcal{M}$ , c'est-à-dire une forme bilinéaire symétrique réelle de signature  $(+ - - -)$ . À l'origine de la courbure de l'espace-temps il y a la présence de masse dans l'univers. Ce lien est traduit par les équations d'Einstein

$$G_{\mu\nu} = 8\pi T_{\mu\nu},$$

où  $G_{\mu\nu}$  représente le tenseur d'Einstein (formé à partir du tenseur de courbure, lui-même formé à partir de la métrique et de ses dérivées premières et secondes) et  $T_{\mu\nu}$  est le tenseur énergie-impulsion. Le membre de gauche décrit la géométrie de l'espace-temps alors que le membre de droite décrit la distribution d'énergie dans l'univers. Ces équations indiquent donc que la géométrie et la distribution d'énergie de l'espace-temps interagissent de manière complexe.

Les trous noirs sont des objets extrêmement complexes à étudier d'un point de vue astrophysique puisqu'ils sont par essence invisibles. On ne peut donc étudier leur propriétés que par des moyens indirects. En particulier, on peut obtenir des informations en étudiant comment les ondes entrantes sont diffusées par le trou noir. En revanche, d'un point de vue mathématique ce sont des objets plutôt simples puisqu'ils ne dépendent que de quatre paramètres : la masse  $M > 0$ , la charge électrique  $Q \in \mathbb{R}$  et le moment angulaire  $a \in \mathbb{R}$  (trou noir en rotation) du trou noir ainsi que la constante cosmologique de l'univers  $\Lambda \in \mathbb{R}$ . La théorie de la diffusion pour des géométries de type trou noir est un sujet de grand intérêt. La diffusion directe pour des trous noirs de type Schwarzschild (statiques, non chargés et à symétrie sphérique), de type Reissner-Nordström-(de Sitter) (statiques, chargés et à symétrie sphérique) et de type Kerr (non chargés et en rotation) a par exemple été étudiée par Bachelot, Dimock, Kay, Nicolas, Jin, Melnik et Häfner dans [Bac91, Bac94, Dim85, DK86, Nic95, Jin98, Mel00, Mel03, Häf03, HN04]. Entre autres raisons, ces études ont été motivées par la découverte de phénomènes inattendus tels que l'effet Hawking et le phénomène de superradiance. On renvoie par exemple aux travaux de Bachelot [Bac97, Bac99], Häfner [Häf09] et Melnyk [Mel04] pour une application des résultats de diffusion à l'effet Hawking. Concernant la diffusion inverse dans des trous noirs de type Reissner-Nordström-(de Sitter), qui sont des solutions à symétrie sphérique et électriquement chargées des équations d'Einstein dans le vide, notre étude est dans lignée des articles de Daudé et Nicoleau [DN08, DN09, DN10, DN11].

Dans l'étude de la théorie de la diffusion dans un trou noir nous devons composer avec deux régions asymptotiques appelées des horizons. En effet, on adopte le point de vue d'un observateur situé loin de l'horizon cosmologique et de l'horizon des événements et statique par rapport à ces horizons. Un tel observateur perçoit alors les horizons comme des régions asymptotiques. Ainsi, nous devons voir les trous noirs de type RN-dS comme des ensembles à symétrie sphérique avec deux bouts (l'horizon cosmologique et l'horizon des événements) ayant une géométrie asymptotiquement hyperbolique. La question que nous posons est alors la suivante :

*Existe-t-il un moyen de caractériser de façon unique les paramètres du trou noir, du*

*point de vue de l'observateur statique, par une expérience de diffusion inverse ?*

Pour reformuler notre problématique on introduit les opérateurs d'ondes associés à des champs de Dirac massifs et chargés évoluant dans la région extérieure du trou noir. On désigne par  $W_{(-\infty)}^{\pm}$  les opérateurs d'ondes correspondant à la partie des champs de Dirac massifs et chargés qui diffuse vers l'horizon des événements et par  $W_{(+\infty)}^{\pm}$  les opérateurs d'ondes correspondant à la partie de ces champs qui diffuse vers l'horizon cosmologique. Grâce à [Dau10, Mel04] on sait que les opérateurs d'ondes globaux qui sont définis par

$$W^{\pm} = W_{(-\infty)}^{\pm} \oplus W_{(+\infty)}^{\pm},$$

existent et sont asymptotiquement complets sur l'espace de Hilbert des données de diffusion. Ceci permet de définir l'opérateur de diffusion global  $S$  par la formule usuelle

$$S = (W^+)^* W^-.$$

L'opérateur de diffusion est l'objet important de ce chapitre. Il contient toutes les informations de diffusion pour un observateur vivant loin des horizons d'un trou noir de type RN-dS. On définit alors la matrice de diffusion  $S(\lambda)$  comme étant la restriction de l'opérateur de diffusion  $S$  à un niveau d'énergie  $\lambda \in \mathbb{R}$ . Grâce à cette définition, on peut reformuler notre question principale :

*Est-ce-que la connaissance de  $S(\lambda)$  à une énergie  $\lambda \in \mathbb{R}$  fixée est une information suffisante pour caractériser de façon unique les paramètres du trou noir ?*

Donnons à présent explicitement le cadre que l'on étudiera dans ce deuxième chapitre. Dans les coordonnées de Schwarzschild, la région extérieure d'un trou noir de type RN-dS est décrite par la variété de dimension quatre

$$\mathcal{M} = \mathbb{R}_t \times ]r_-, r_+[ \times \mathbb{S}_{\omega}^2,$$

équipée de la métrique lorentzienne

$$g = g_{\mu\nu} dx^{\mu} dx^{\nu} = F(r) dt^2 - F(r)^{-1} dr^2 - r^2 d\omega^2,$$

où

$$F(r) = 1 - \frac{2M}{r} + \frac{Q^2}{r^2} - \frac{\Lambda r^2}{3},$$

où  $d\omega^2 = d\theta^2 + \sin(\theta)^2 d\varphi^2$  est la métrique euclidienne sur la sphère  $\mathbb{S}^2$ . La constante  $M$  peut être interprétée comme la masse du trou noir, la constante  $Q$  comme étant sa charge

alors que  $\Lambda > 0$  désigne la constante cosmologique de l'univers. Les horizons  $\{r = r_-\}$  et  $\{r = r_+\}$  sont respectivement appelés l'horizon des événements et l'horizon cosmologique. Au lieu de travailler avec la variable radiale  $r$ , on décrit la région extérieure du trou noir en utilisant la variable radiale de Regge-Wheeler (RW),  $x$ , qui est définie explicitement par

$$x = \frac{1}{2\kappa_n} \ln(r - r_n) + \frac{1}{2\kappa_c} \ln(r - r_c) + \frac{1}{2\kappa_-} \ln(r - r_-) + \frac{1}{2\kappa_+} \ln(r - r_+) + C,$$

où  $C$  est une constante d'intégration et les quantités  $\kappa_j$ ,  $j = n, c, -, +$  sont définies par

$$\kappa_n = \frac{1}{2}F'(r_n), \quad \kappa_c = \frac{1}{2}F'(r_c), \quad \kappa_- = \frac{1}{2}F'(r_-), \quad \kappa_+ = \frac{1}{2}F'(r_+).$$

On remarque que les horizons  $\{r = r_\pm\}$  sont envoyés aux infinis  $\{x = \pm\infty\}$  par la variable de RW,  $x$ .

On s'intéresse alors à la propagation et la diffusion de champs de Dirac massifs et chargés dans un tel trou noir. Les champs de Dirac massifs et chargés considérés sont représentés par des spineurs à quatre composantes  $\psi$  appartenant à l'espace de Hilbert

$$L^2(\mathbb{R} \times \mathbb{S}^2; \mathbb{C}^4),$$

qui satisfont l'équation d'évolution

$$i\partial_t\psi = (\Gamma^1 D_x + a(x)\mathbb{D}_{\mathbb{S}^2} + b(x)\Gamma^0 + c(x))\psi.$$

Le symbole  $D_x$  désigne  $-i\partial_x$  alors que  $\mathbb{D}_{\mathbb{S}^2}$  désigne l'opérateur de Dirac sur  $\mathbb{S}^2$ . Les potentiels  $a$ ,  $b$  et  $c$  sont des fonctions scalaires lisses données en termes de la métrique par

$$a(x) = \frac{\sqrt{F(r)}}{r}, \quad b(x) = m\sqrt{F(r)} \quad \text{et} \quad c(x) = \frac{qQ}{r},$$

où  $m$  et  $q$  désignent respectivement la masse et la charge des champs de Dirac. Enfin, les matrices  $\Gamma^1$ ,  $\Gamma^2$ ,  $\Gamma^3$  et  $\Gamma^0$  apparaissant dans ces équations sont les matrices de Dirac  $4 \times 4$  qui vérifient les relations d'anti-commutativité

$$\Gamma^i \Gamma^j + \Gamma^j \Gamma^i = 2\delta_{ij} Id, \quad \forall i, j = 0, 1, 2, 3.$$

On montrera qu'il existe des constantes  $a_\pm$ ,  $b_\pm$ ,  $c_\pm$  et  $c'_\pm$  telles que les potentiels  $a$ ,  $b$  et  $c$  possèdent les asymptotiques suivantes lorsque  $x \rightarrow \pm\infty$  :

$$\begin{aligned} a(x) &= a_{\pm} e^{\kappa_{\pm} x} + O(e^{3\kappa_{\pm} x}), & a'(x) &= a_{\pm} \kappa_{\pm} e^{\kappa_{\pm} x} + O(e^{3\kappa_{\pm} x}), \\ b(x) &= b_{\pm} e^{\kappa_{\pm} x} + O(e^{3\kappa_{\pm} x}), & b'(x) &= b_{\pm} \kappa_{\pm} e^{\kappa_{\pm} x} + O(e^{3\kappa_{\pm} x}), \\ c(x) &= c_{\pm} + c'_{\pm} e^{2\kappa_{\pm} x} + O(e^{4\kappa_{\pm} x}), & c'(x) &= 2c'_{\pm} \kappa_{\pm} e^{2\kappa_{\pm} x} + O(e^{4\kappa_{\pm} x}), \end{aligned}$$

où

$$c_{-} = \frac{qQ}{r_{-}} \quad \text{et} \quad c_{+} = \frac{qQ}{r_{+}}.$$

On remarque donc que les potentiels  $a$  et  $b$  sont de courte portée lorsque  $x \rightarrow \pm\infty$  alors que  $c - c_{-}$  et  $c - c_{+}$  sont respectivement de courte portée lorsque  $x \rightarrow -\infty$  et  $x \rightarrow +\infty$ . Ainsi, la dynamique de comparaison que l'on choisit à l'horizon des événements est celle générée par le hamiltonien  $H_{-} = \Gamma^1 D_x + c_{-}$  alors qu'à l'horizon cosmologique on choisit la dynamique asymptotique générée par le hamiltonien  $H_{+} = \Gamma^1 D_x + c_{+}$ .

On définit alors la matrice de diffusion  $S(\lambda)$  à une énergie  $\lambda \in \mathbb{R}$ . De plus, comme dans le premier chapitre, grâce à la symétrie sphérique on utilise la décomposition sur les harmoniques sphériques généralisées pour se ramener à un problème unidimensionnel et ainsi définir les matrices de diffusion partielles  $S(\lambda, n)$ , où  $n \in \mathbb{N}^*$  désigne à nouveau le moment angulaire. Le but de ce deuxième chapitre est alors de montrer que la connaissance des coefficients de réflexion partiels  $L(\lambda, n)$  ou  $R(\lambda, n)$  pour une énergie fixée  $\lambda \in \mathbb{R}$  et pour  $n \in \mathcal{L}$ , où  $\mathcal{L}$  est un sous-ensemble de  $\mathbb{N}^*$  satisfaisant la condition de Müntz  $\sum_{n \in \mathcal{L}} \frac{1}{n} = +\infty$ , détermine de façon unique la métrique  $g$  du trou noir.

Dans le dernier chapitre de cette thèse nous étudierons un problème de diffusion inverse à énergie fixée sur des variétés de Stäckel de dimension trois ayant la topologie d'un cylindre torique, satisfaisant la condition de Robertson et possédant une structure asymptotiquement hyperbolique. Les variétés de Stäckel ont été introduite en 1891 par Stäckel dans [Stä91] et sont d'un grand intérêt dans la théorie de séparation des variables. En effet, il est connu que la séparabilité additive de l'équation de Hamilton-Jacobi pour le flot géodésique sur une variété riemannienne est équivalente au fait que la métrique soit sous forme de Stäckel. Cependant, pour obtenir la séparabilité multiplicative de l'équation de Helmholtz qui nous intéresse ici on doit également supposer que la condition de Robertson est satisfaite. Comme nous le verrons dans ce chapitre, il existe également des caractérisations intrinsèques de la séparabilité des équations de Hamilton-Jacobi et de Helmholtz en termes de tenseurs de Killing (qui correspondent à des symétries faibles) ou d'opérateurs de symétries pour l'opérateur de Laplace-Beltrami. On renvoie à [BCR02a, BCR02b, CR06, Eis34, Eis97, KM82, KM80, KM84, Stä93] pour d'importantes contributions dans ce domaine et à [Ben15, Mil88] pour un état de l'art sur ces questions.



On insiste sur le fait que la description des variétés riemanniennes donnée par Stäckel est locale. On obtient une description globale de ces variétés en choisissant un système de coordonnées global ce qui justifie l'appellation “variétés de Stäckel” dans notre étude. On choisit de travailler avec des variétés de Stäckel  $(\mathcal{M}, g)$  ayant la topologie d'un cylindre torique. Pour pouvoir définir l'opérateur de diffusion sur ces variétés, on ajoute alors une structure asymptotiquement hyperbolique, introduite dans [IK14] (voir aussi [GSB09, JSB00, SB05]), aux deux bouts radiaux de notre cylindre. On peut alors définir l'opérateur de diffusion  $S_g$  et ainsi la matrice de diffusion  $S_g(\lambda)$  à une énergie fixée  $\lambda \neq 0$  associée à l'équation de Helmholtz sur  $(\mathcal{M}, g)$  qui est l'objet principal de ce travail. La question que nous posons est alors la suivante :

*Est-ce-que la matrice de diffusion  $S_g(\lambda)$  à une énergie fixée  $\lambda \neq 0$  détermine de façon unique la métrique  $g$  de la variété de Stäckel ?*

On rappelle que les problèmes de diffusion inverse à énergie fixée sur des variétés asymptotiquement hyperboliques sont étroitement reliés au problème de Calderón anisotrope pour des variétés riemanniennes compactes à bord. L'un des buts de ce chapitre est ainsi de donner des exemples de variétés pour lesquelles nous sommes en mesure de résoudre le problème de diffusion inverse à énergie fixée mais qui ne possèdent pas l'une des structures particulières pour lesquelles la question de l'unicité pour le problème Calderón anisotrope sur des variétés riemanniennes compactes à bord est résolue. On note que le résultat que nous prouvons ici est un résultat d'unicité. On est également intéressé par l'obtention de résultats de stabilité c'est-à-dire par l'étude de la continuité de l'application  $g \mapsto S_g(\lambda)$ . Cette question pourra faire l'objet d'un travail futur.

Plus précisément, on considère des variétés ayant la topologie d'un cylindre torique avec deux bouts munies d'une carte globale

$$\mathcal{M} = (0, A)_{x^1} \times \mathcal{T}_{x^2, x^3}^2,$$

où  $\mathcal{T}_{x^2, x^3}^2 =: \mathcal{T}^2$  désigne le tore de dimension deux. La variable  $x^1$  est la variable radiale alors que  $(x^2, x^3)$  désigne les variables angulaires. On introduit alors une matrice de Stäckel de taille  $3 \times 3$  de la forme

$$S = \begin{pmatrix} s_{11}(x^1) & s_{12}(x^1) & s_{13}(x^1) \\ s_{21}(x^2) & s_{22}(x^2) & s_{23}(x^2) \\ s_{31}(x^3) & s_{32}(x^3) & s_{33}(x^3) \end{pmatrix},$$

où les coefficients  $s_{ij}$  sont des fonctions lisses. On munit ainsi  $\mathcal{M}$  de la métrique riemannienne

$$g = H_1^2(dx^1)^2 + H_2^2(dx^2)^2 + H_3^2(dx^3)^2,$$

avec

$$H_i^2 = \frac{\det(S)}{s^{i1}}, \quad \forall i \in \{1, 2, 3\},$$

où  $s^{i1}$  est le mineur (avec signe) associé au coefficient  $s_{i1}$  pour tout  $i \in \{1, 2, 3\}$ . On remarque que la métrique  $g$  est riemannienne si et seulement si le déterminant de la matrice de Stäckel  $S$  et les mineurs  $s^{11}$ ,  $s^{21}$  et  $s^{31}$  ont le même signe. On note également que l'application  $S \mapsto g$  n'est pas injective. Cela nous permettra de choisir n'importe quel représentant dans la classe d'équivalence décrite par ces invariances de la métrique et ainsi de faire des hypothèses sur les coefficients de la matrice de Stäckel sans perte de généralité.

Sur la variété de Stäckel  $(\mathcal{M}, g)$  on est intéressé par l'étude de l'équation de Helmholtz

$$-\Delta_g f = \lambda^2 f.$$

Comme nous l'avons déjà mentionné la structure de Stäckel est suffisante pour obtenir la séparabilité additive de l'équation de Hamilton-Jacobi pour le flot géodésique mais ne suffit pas pour obtenir la séparabilité multiplicative de l'équation de Helmholtz. En effet, nous devons également supposer que la condition de Robertson est satisfaite. Cette condition peut être définie de la façon suivante : il existe trois fonctions  $f_i(x^i)$ ,  $i \in \{1, 2, 3\}$ , chacune fonction seulement de la variable  $x^i$ , telles que

$$\frac{s^{11}s^{21}s^{31}}{\det(S)} = f_1 f_2 f_3.$$

Cette condition a également un sens géométrique. En effet, comme cela a été montré par Einsenhardt (voir [Eis34]), la condition de Robertson est satisfaite si et seulement si le tenseur de Ricci est diagonal :

$$R_{ij} = 0, \quad \forall i \neq j.$$

Afin de définir la matrice de diffusion à une énergie  $\lambda \neq 0$  fixée associée à l'équation de Helmholtz comme dans [IK14], on ajoute une structure asymptotiquement hyperbolique aux deux bouts radiaux de notre cylindre de Stäckel  $\{x^1 = 0\}$  et  $\{x^1 = A\}$ . On rappelle, qu'une variété riemannienne  $(\mathcal{M}, g)$  à bord  $\partial\mathcal{M}$  est dite asymptotiquement hyperbolique si sa courbure sectionnelle tend vers  $-1$  au bord. Afin d'obtenir cette structure on ajoute des conditions sur les composantes de la matrice de Stäckel. La classe des variétés de

Stäckel que nous étudierons est donc définie par les propriétés suivantes :

- $H_i^2 > 0$  pour  $i \in \{1, 2, 3\}$  (Métrique riemannienne).
- $s_{2j}(0) = s_{2j}(B)$ ,  $s'_{2j}(0) = s'_{2j}(B)$ ,  $s_{3j}(0) = s_{3j}(C)$  et  $s'_{3j}(0) = s'_{3j}(C)$  pour  $j \in \{1, 2, 3\}$  (Conditions périodiques en les variables angulaires).
- Structure asymptotiquement hyperbolique aux bouts  $\{x^1 = 0\}$  et  $\{x^1 = A\}$  (à l'ordre zéro) :

– En  $\{x^1 = 0\}$  : il existe  $\epsilon_0 > 0$  tel que

$$(x^1)^2 s_{11}(x^1) = [1]_{\epsilon_0}, \quad s_{12}(x^1) = [1]_{\epsilon_0} \quad \text{et} \quad s_{13}(x^1) = [1]_{\epsilon_0},$$

où,

$$[1]_{\epsilon_0} = 1 + O((1 + |\log(x^1)|)^{-1-\epsilon_0}).$$

– En  $\{x^1 = A\}$  : il existe  $\epsilon_1 > 0$  tel que

$$(A - x^1)^2 s_{11}(x^1) = [1]_{\epsilon_1}, \quad s_{12}(x^1) = [1]_{\epsilon_1} \quad \text{et} \quad s_{13}(x^1) = [1]_{\epsilon_1},$$

où,

$$[1]_{\epsilon_1} = 1 + O((1 + |\log(A - x^1)|)^{-1-\epsilon_1}).$$

On note que l'on doit également ajouter des conditions sur les dérivées des fonctions  $s_{1j}$ ,  $j \in \{1, 2, 3\}$ , pour être dans le cadre de [IK14]. On remarque que sous ces conditions on peut écrire la métrique  $g$  dans un voisinage du bout  $\{x^1 = 0\}$ , sous la forme

$$g = \frac{(dx^1)^2 + d\Omega_{\mathcal{T}^2}^2 + P(x^1, x^2, x^3, dx^1, dx^2, dx^3)}{(x^1)^2},$$

où

$$d\Omega_{\mathcal{T}^2}^2 = \frac{s^{11}}{s_{32} - s_{33}}(dx^2)^2 + \frac{s^{11}}{s_{23} - s_{22}}(dx^3)^2,$$

est une métrique riemannienne sur le 2-tore  $\mathcal{T}^2$  et  $P$  est un terme de reste qui est petit lorsque  $x^1 \rightarrow 0$ . Ainsi, à la limite  $x^1 \rightarrow 0$ , on voit que

$$g \sim \frac{(dx^1)^2 + d\Omega_{\mathcal{T}^2}^2}{(x^1)^2},$$

c'est-à-dire que  $g$  est une petite perturbation d'une métrique de type hyperbolique.

Grâce à cette structure asymptotiquement hyperbolique on peut suivre la construction

de la matrice de diffusion à une énergie fixée  $\lambda \neq 0$  associée à l'équation de Helmholtz,  $S_g(\lambda)$ , donnée dans [IK14]. L'objet de ce troisième chapitre est alors de démontrer que la connaissance de la matrice de diffusion à une énergie fixée détermine de façon unique la métrique de la variété de Stäckel considérée (aux obstructions naturelles près).

## Plan de la thèse

Chaque chapitre de cette thèse a donné lieu à des publications [DGN13, Gob15] et à une prépublication [Gob16]. Ces chapitres peuvent être lus indépendamment et contiennent leur propre introduction.

### Premier chapitre : Problème inverse local à énergie fixée

Dans le premier chapitre de cette thèse nous allons étudier un problème inverse local à énergie fixée pour des Variétés Asymptotiquement Hyperboliques et à Symétrie Sphérique. Le but de ce chapitre sera en effet de démontrer que la connaissance partielle d'un des coefficients de réflexion à une erreur près détermine de façon unique la métrique d'une VAHSS dans un voisinage du bout correspondant au coefficient de réflexion considéré. De plus, nous montrerons également que si le terme d'erreur est suffisamment petit nous pouvons même récupérer la métrique sur toute la variété. Dans un second temps, nous montrerons que la connaissance partielle du coefficient de transmission à une certaine erreur près associée à la connaissance d'un nombre fini mais suffisamment grand de coefficients de réflexion partiels et à une hypothèse technique sur les courbures sectionnelles permet de déterminer de façon unique la métrique sur toute la VAHSS. Enfin, nous appliquerons ces résultats au cadre de la Relativité Générale et plus précisément aux trous noirs de type Reissner-Nordström-de Sitter. Les résultats énoncés dans ce chapitre sont nouveaux puisqu'ils constituent les premiers résultats inverses *locaux* pour des problèmes inverses métriques.

Le premier point de notre preuve consiste à utiliser la symétrie sphérique du modèle afin de procéder à une décomposition sur une base d'harmoniques sphériques dans le but de nous ramener à un problème de dimension un. Étant donnée une énergie  $\lambda \neq 0$ , on peut ainsi décomposer la matrice de diffusion  $S(\lambda)$  en une somme directe de matrices de diffusion partielles  $S(\lambda, n)$  indexée par le moment angulaire  $n \in \mathbb{N}^*$ . L'idée fondamentale de notre preuve réside alors dans l'utilisation d'une méthode de Complexification du Moment Angulaire. L'idée générale de considérer un moment angulaire complexe prend sa source dans un travail de Regge (voir [Reg59]) concernant l'étude de la matrice de

diffusion pour des opérateurs de Schrödinger dans  $\mathbb{R}^3$  ayant des potentiels à symétrie sphérique. On renvoie également à [dAR65, New02] pour des ouvrages traitant de cette méthode. Cet outil a déjà été utilisé dans le domaine des problèmes inverses pour un moment angulaire dans [DKN14, DKN15, DN13, DN11, DN15, Ram99] et l'on note qu'il est également utilisé en physique à hautes énergies (voir [Col77]). Le but de cette méthode est d'obtenir à partir d'un régime discret de données un régime continu d'informations. Pour ce faire on procède en trois étapes. On commence par autoriser le moment angulaire à prendre des valeurs complexes. On étudie alors les propriétés d'analyticité des coefficients de réflexion  $L(\lambda, z)$  et  $R(\lambda, z)$  par rapport au moment angulaire complexe  $z := n$ . Enfin, on utilise des résultats d'unicité, ici pour la transformée de Laplace, afin d'obtenir une égalité sur le plan complexe. La principale nouveauté de ce chapitre par rapport au travail [DN11], dont nous améliorons le résultat ici, est l'adaptation du célèbre Théorème de Borg-Marchenko local, connu dans le cadre des problèmes inverses pour l'équation de Schrödinger unidimensionnel, au cadre des problèmes inverses avec métriques.

## Deuxième chapitre : Problème inverse dans des trous noirs

Le deuxième chapitre de cette thèse concerne la résolution d'un problème de diffusion inverse à énergie fixée pour des champs de Dirac massifs et chargés dans le cas d'une géométrie de type trou noir. Plus précisément, le but de ce chapitre est de montrer que la connaissance partielle d'un des coefficients de réflexion à une énergie fixée détermine de façon unique les paramètres d'un trou noir de type Reissner-Nordström-de Sitter. Ceci constitue un résultat nouveau par rapport à [DN11] car nous avons ajouté les termes de masse et de charge et également par rapport à [DN10] (qui traite le cas avec masse et charge) car nous avons besoin de la connaissance de l'opérateur de diffusion seulement à une énergie fixée et non pas sur un intervalle d'énergies.

Dans notre preuve, nous utilisons, comme dans [DN11], la symétrie sphérique et la décomposition sur une base d'harmoniques sphériques pour pouvoir appliquer une méthode de Complexification du Moment Angulaire à l'aide de résultats d'unicité pour la classe de Nevanlinna. Plusieurs difficultés se posent lorsque l'on ajoute les termes de masse et de charge dans l'équation de Dirac. Tout d'abord, il convient de noter que le terme de charge est à longue portée ce qui oblige à conjuguer l'opérateur (ce qui avait déjà été fait dans [DN10]) pour pouvoir être dans le cadre de [AKvdM00] et ainsi définir l'opérateur de diffusion de façon stationnaire à l'aide des fonctions de Jost. Dans un second temps, on cherche à obtenir des asymptotiques en  $z$  grand des solutions de Jost ( $z$  étant le complexifié du moment angulaire) mais contrairement à [DN11] ces solutions ne possèdent

pas de développement en série en la variable  $z$ . Par conséquent, pour montrer que ces solutions sont des perturbations de fonctions de Bessel et obtenir les asymptotiques voulues nous devons utiliser un argument de perturbation ainsi que de bonnes estimations du noyau de Green. Notons enfin que dans le cas massif, les données de diffusion ne possèdent pas les propriétés de symétries utilisées dans [DN11]. Cette absence de symétrie a de nombreuses répercussions techniques dans notre preuve.

### Troisième chapitre : Problème inverse à énergie fixée : variétés de Stäckel

Dans le troisième chapitre de cette thèse nous démontrerons que la connaissance de la matrice de diffusion à une énergie fixée sur une variété de Stäckel de dimension trois ayant la topologie d'un cylindre torique, satisfaisant la condition de Robertson et munie d'une structure asymptotiquement hyperbolique détermine de façon unique sa métrique. Ce travail est une généralisation de l'article [DKN14] de Daudé, Kamran et Nicoleau dans lequel les auteurs répondent à la même question pour des surfaces de Liouville qui correspondent aux variétés de Stäckel en dimension deux. Ce cadre est plus complexe géométriquement que les précédents puisque malgré la présence de symétrie faible (tenseurs de Killing dont l'existence est équivalente à la séparation des variables) il n'y a pas, a priori, de symétries fortes (champs de Killing). On rappelle que les problèmes de diffusion inverse à énergie fixée sur des variétés asymptotiquement hyperboliques sont étroitement reliés au problème de Calderón anisotrope pour des variétés riemanniennes compactes à bord. L'un des buts de ce chapitre est ainsi de donner des exemples de variétés pour lesquelles nous sommes capables de résoudre le problème de diffusion inverse à énergie fixée mais qui ne possèdent pas l'une des structures particulières pour lesquelles la question de l'unicité pour le problème de Calderón anisotrope sur des variétés riemanniennes compactes à bord est résolue.

La clé de ce chapitre consiste à utiliser une nouvelle version de la méthode de Complexification du Moment Angulaire qui est cette fois multivariable. En effet, grâce à la structure de variété de Stäckel satisfaisant la condition de Robertson, l'équation de Helmholtz se sépare en un système de trois équations différentielles ordinaires : une équation radiale et deux équations angulaires. Ainsi, la matrice de diffusion à énergie fixée peut être décomposée en un ensemble de coefficients de diffusion indexé par un ensemble discret formé de *deux* moments angulaires qui correspondent aux *deux* constantes de séparation. Dans notre étude on utilise alors une nouvelle version (car multivariable) de la méthode de Complexification du Moment Angulaire pour *deux moments angulaires*. On insiste sur le fait que l'on est obligé d'utiliser cette version multivariable (non connue à ce

jour) car ces deux moments angulaires (qui correspondent également au spectre couplé d'opérateurs qui commutent) ne sont pas indépendants et ne peuvent pas être considérés séparément. On utilise ainsi cette méthode combinée à des résultats d'unicité pour des fonctions holomorphes de deux variables pour nous permettre d'utiliser le théorème de Borg-Marchenko et ainsi conclure à l'unicité de la métrique.

## Liste de publications

Plusieurs publications sont issues de ce travail : un article accepté pour publication dans une revue internationale :

- T. Daudé, D. Gobin, F. Nicoleau, *Local inverse scattering results at fixed energy in spherically symmetric asymptotically hyperbolic manifolds*, accepté pour publication dans *Inverse Problems and Imaging*, (2016),

un article publié dans une revue internationale :

- D. Gobin, *Inverse scattering at fixed energy for massive charged Dirac fields in de Sitter-Reissner-Nordström black holes*, *Inverse Problems*, **31** (5), (2015),

et un article soumis :

- D. Gobin, *Inverse scattering at fixed energy on three-dimensional asymptotically hyperbolic Stäckel manifolds*, (2016).

# Problème inverse local à énergie fixée

Dans ce chapitre reprenant l'article [DGN13], on adapte le célèbre résultat d'unicité *locale* de Borg-Marchenko, connu dans le cadre des problèmes inverses pour l'équation de Schrödinger unidimensionnelle, afin d'obtenir des résultats d'unicité *locale* dans le cadre des problèmes inverses *métriques*. Plus précisément, on considère une classe de variétés à symétrie sphérique ayant deux bouts asymptotiquement hyperboliques et on étudie les propriétés de diffusion de champs de Dirac se propageant dans de telles variétés. Grâce à la symétrie sphérique du modèle, on sait que la diffusion stationnaire est encodée par une famille dénombrable d'équations de Dirac unidimensionnelles. Ceci nous permet de définir les coefficients de transmission  $T(\lambda, n)$  et les coefficients de réflexion  $L(\lambda, n)$  et  $R(\lambda, n)$  des champs de Dirac ayant une énergie  $\lambda$  et un moment angulaire  $n$ . Le résultat principal de ce chapitre est alors un résultat d'unicité locale. Plus précisément, on prouve qu'à une énergie fixée  $\lambda \neq 0$ , la connaissance des coefficients de réflexion  $L(\lambda, n)$  (respectivement  $R(\lambda, n)$ ) - à une erreur de la forme  $O(e^{-2nB})$  avec  $B > 0$  près - détermine de façon unique la métrique dans un voisinage du bout de gauche (respectivement de droite). De plus, la taille du voisinage dépend de la taille du terme d'erreur. Notre preuve repose essentiellement sur l'utilisation de la méthode de Complexification du Moment Angulaire et de résultats d'unicité pour la transformée de Laplace. Dans une dernière partie, nous



appliquerons ces résultats au cadre de la Relativité Générale et plus précisément aux trous noirs de type Reissner-Nordström-de Sitter.

## 1.1 Introduction et présentation des résultats

Le but de ce chapitre est d'étendre les résultats d'unicité inverse *locale* de type Borg-Marchenko, connus pour l'équation de Schrödinger unidimensionnelle et d'abord obtenus dans [Sim99] puis améliorés dans [Ben01, GS00, Tes09], au cadre des problèmes inverses *métriques*. Pour rappel, le Théorème de Borg-Marchenko peut formellement être énoncé de la façon suivante. On considère deux équations de Schrödinger stationnaires sur  $\mathbb{R}^+$  ayant pour potentiels  $q_1$  et  $q_2$  et à chacune de ces équations on associe une fonction de Weyl-Titchmarsh à l'aide de systèmes fondamentaux de solutions. Le Théorème de Borg-Marchenko énonce alors que si ces fonctions de Weyl-Titchmarsh coïncident les potentiels sont égaux. Simon a obtenu dans [Sim99] une version locale de ce résultat qui énonce que les potentiels  $q_1$  et  $q_2$  coïncident sur  $]0, a[$  si et seulement si les fonctions de Weyl-Titchmarsh sont égales à une erreur exponentielle près dépendante de  $a$ . Une nouvelle preuve élégante de ce résultat à ensuite été donnée par Bennewitz dans [Ben01]. Pour plus de détails sur la définition de ces objets on renvoie le lecteur à la discussion précédent le Théorème 1.1.5. Notre but est ainsi ici d'adapter cette dernière preuve dans le cadre des problèmes inverses métriques. Plus précisément, on l'utilise sur des variétés courbes de dimension trois ou quatre pour lesquelles l'inconnue - i.e. l'objet que l'on cherche à déterminer en observant des ondes à l'infini - est la métrique (riemannienne ou lorentzienne) elle-même. Nous considérons une classe très spécifique et simple de variétés riemanniennes de dimension trois que l'on nomme Variétés Asymptotiquement Hyperboliques à Symétrie Sphérique, notée VAHSS. Précisément, ces variétés sont décrites par l'ensemble

$$\Sigma = \mathbb{R}_x \times \mathbb{S}_{\theta, \varphi}^2,$$

équipé de la métrique riemannienne

$$\sigma = dx^2 + a(x)^{-2} d\omega^2,$$

où  $d\omega^2 = (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\varphi^2)$  est la métrique euclidienne sur la sphère de dimension deux  $\mathbb{S}^2$ . Les hypothèses sur la fonction  $a(x)$  - qui détermine entièrement la métrique - sont :

$$a \in C^2(\mathbb{R}), \quad a > 0, \tag{1.1.1}$$

et

$$\begin{aligned} \exists a_{\pm} > 0, \kappa_+ < 0, \kappa_- > 0, \quad \begin{aligned} a(x) &= a_{\pm} e^{\kappa_{\pm} x} + O(e^{3\kappa_{\pm} x}), & x \rightarrow \pm\infty, \\ a'(x) &= a_{\pm} \kappa_{\pm} e^{\kappa_{\pm} x} + O(e^{3\kappa_{\pm} x}), & x \rightarrow \pm\infty. \end{aligned} \end{aligned} \quad (1.1.2)$$

Sous ces hypothèses,  $(\Sigma, \sigma)$  est une variété riemannienne à symétrie sphérique avec deux bouts asymptotiquement hyperboliques  $\{x = \pm\infty\}$ . On note en effet que la métrique  $\sigma$  est alors asymptotiquement une *petite* perturbation des métriques hyperboliques

$$\sigma_{\pm} = dx^2 + e^{-2\kappa_{\pm} x} d\omega_{\pm}^2, \quad x \rightarrow \pm\infty,$$

où  $d\omega_{\pm}^2 = 1/(a_{\pm}^2) d\omega^2$  sont des métriques sur  $\mathbb{S}^2$ . Ainsi, on remarque que la courbure sectionnelle de  $\sigma$  tend vers la *constante négative*  $-(\kappa_{\pm})^2$  au bout correspondant  $\{x = \pm\infty\}$ . D'où le nom de variétés “asymptotiquement hyperboliques” pour ce type de géométrie. On note que l'on autorise  $\kappa_-$  et  $\kappa_+$  à prendre des valeurs différentes ce qui donne lieu à des courbures sectionnelles différentes aux deux bouts. On insiste enfin sur le fait que les VAHSS sont des cas très particuliers (à cause de l'hypothèse de symétrie sphérique) de la classe plus vaste des Variétés Asymptotiquement Hyperboliques décrites par exemple dans [IK14, JSB00, SB05].

Sur la variété  $(\Sigma, \sigma)$ , on est intéressé par l'étude de la propagation d'ondes (scalaires, électromagnétiques, de Dirac, ...) et de leur diffusion en temps longs afin de tenter de répondre à la question suivante :

*Peut-on déterminer la métrique en observant ces ondes à l'infini (dans notre modèle les deux bouts  $\{x = \pm\infty\}$ ) ?*

On étudie donc comment des champs de Dirac non massifs se propagent et sont diffusés dans les deux bouts asymptotiquement hyperboliques. On note que l'on s'attend à ce que nos résultats soient également vrais si l'on remplace l'équation de Dirac par une équation des ondes. Plus précisément, on considère l'équation de Dirac non-massive

$$i\partial_t \psi = \mathbb{D}_{\sigma} \psi, \quad (1.1.3)$$

où  $\mathbb{D}_{\sigma}$  désigne une représentation de l'opérateur de Dirac sur  $(\Sigma, \sigma)$  et le 2-spineur solution  $\psi$  appartient à  $L^2(\Sigma; \mathbb{C}^2)$ . Nous allons montrer dans la Section 1.2 qu'il existe un lien très simple entre  $\mathbb{D}_{\sigma}$  et la fonction  $a(x)$  apparaissant dans la métrique  $\sigma$ . Plus précisément,

$$\mathbb{D}_{\sigma} = \Gamma^1 D_x + a(x) \mathbb{D}_{\mathbb{S}^2}, \quad (1.1.4)$$

où  $\mathbb{D}_{\mathbb{S}^2}$  désigne l'opérateur de Dirac intrinsèque sur  $\mathbb{S}^2$ , représenté ici par l'expression

$$\mathbb{D}_{\mathbb{S}^2} = \Gamma^2 \left( D_\theta + \frac{i \cot \theta}{2} \right) + \Gamma^3 \frac{1}{\sin \theta} D_\varphi, \quad (1.1.5)$$

avec  $D_x = -i\partial_x$ ,  $D_\theta = -i\partial_\theta$ ,  $D_\varphi = -i\partial_\varphi$  et où les matrices  $2 \times 2$  de Dirac  $\Gamma^1, \Gamma^2, \Gamma^3$  vérifient les relations d'anti-commutativité habituelles

$$\Gamma^i \Gamma^j + \Gamma^j \Gamma^i = 2\delta_{ij}. \quad (1.1.6)$$

En raison de la symétrie sphérique du modèle et de l'existence d'harmoniques sphériques généralisées  $\{Y_{kl}\}$  qui “diagonalisent”  $\mathbb{D}_{\mathbb{S}^2}$ , on peut décomposer l'espace de Hilbert des énergies  $\mathcal{H} = L^2(\Sigma; \mathbb{C}^2)$  en une somme hilbertienne d'espaces de Hilbert partiels  $\mathcal{H}_{kl}$  tels que les  $\mathcal{H}_{kl}$  soient invariants sous l'action de l'opérateur de Dirac (1.1.4). Plus précisément, si l'on introduit l'ensemble des indices  $I = \{k \in 1/2 + \mathbb{Z}, l \in 1/2 + \mathbb{N}, |k| \leq l\}$ , on a

$$\mathcal{H} = \bigoplus_{(k,l) \in I} \mathcal{H}_{kl}, \quad \mathcal{H}_{kl} = L^2(\mathbb{R}; \mathbb{C}^2) \otimes Y_{kl},$$

et

$$\mathbb{D}_\sigma^{kl} := \mathbb{D}_\sigma|_{\mathcal{H}_{kl}} = \Gamma^1 D_x - (l + 1/2)a(x)\Gamma^2.$$

On note que les opérateurs de Dirac partiels  $\mathbb{D}_\sigma^{kl}$  dépendent uniquement du *moment angulaire*  $l + 1/2 \in \mathbb{N}^* = \mathbb{N} \setminus \{0\}$ . Pour simplifier, on désignera  $l + \frac{1}{2}$  par  $n$  (ce nouveau paramètre  $n$  parcourant l'ensemble des entiers non nuls  $\mathbb{N}^*$ ) et on notera

$$\mathbb{D}_\sigma^n = \Gamma^1 D_x - na(x)\Gamma^2, \quad (1.1.7)$$

pour les opérateurs de Dirac partiels sur les harmoniques sphériques généralisées  $Y_{kl}$ . On est ainsi amené à considérer la restriction de l'équation de Dirac (1.1.3) sur chaque espace de Hilbert partiel  $\mathcal{H}_{kl}$  séparément et à étudier les propriétés de la famille des hamiltoniens de Dirac unidimensionnels  $\mathbb{D}_\sigma^n$ ,  $n \in \mathbb{N}^*$ , pour obtenir des résultats d'analyse spectrale et de diffusion directe et inverse pour le hamiltonien de Dirac complet  $\mathbb{D}_\sigma$ . Ceci a été fait dans [DN11] dans un contexte très similaire (voir également [AKvdM00, Dau10, DN10]). On note que les modèles étudiés dans [DN11] (voir aussi [Dau10, DN10]) viennent de la Relativité Générale. Plus précisément, dans ce travail est étudiée la théorie de la diffusion directe et inverse pour des champs de Dirac se propageant dans la région extérieure de trous noirs de type Reissner-Nordström-de Sitter. Il s'avère que ces modèles relativistes et ceux présentés dans ce chapitre sont équivalents. Ceci est mentionné rapidement dans

[DN11] et montré rigoureusement dans la Section 1.2. Rappelons brièvement les résultats de théorie spectrale et de diffusion directe et inverse qui nous intéressent. On renvoie à la Section 1.3 pour plus de détails.

Premièrement, le hamiltonien de Dirac  $\mathbb{D}_\sigma$  est autoadjoint sur l'espace de Hilbert  $\mathcal{H} = L^2(\Sigma; \mathbb{C}^2)$  et a un spectre absolument continu. En particulier, le spectre purement ponctuel de  $\mathbb{D}_\sigma$  est vide. Par conséquent, l'énergie des champs de Dirac non-massifs ne peut rester emprisonnée dans un sous-ensemble compact de  $\Sigma$ , *i.e.* que pour tout sous-ensemble compact  $K \subset \mathbb{R}$ ,

$$\lim_{t \rightarrow \pm\infty} \|\mathbf{1}_K(x) e^{-it\mathbb{D}_\sigma} \psi\| = 0.$$

En d'autres termes, les champs de Dirac non-massifs *diffusent* vers les bouts asymptotiques  $\{x = \pm\infty\}$  de la variété  $\Sigma$  en temps longs.

Dans un second temps, on établit une théorie de la diffusion directe complète pour  $\mathbb{D}_\sigma$  sur  $(\Sigma, \sigma)$ . Pour toute énergie  $\lambda \in \mathbb{R}$ , on désigne la matrice de diffusion à l'énergie  $\lambda$  par  $S(\lambda)$ . Il s'agit d'un opérateur unitaire sur  $L^2(\mathbb{S}^2; \mathbb{C}^2)$  qui possède une structure de matrice  $2 \times 2$ , *i.e.*

$$S(\lambda) = \begin{pmatrix} T_L(\lambda) & R(\lambda) \\ L(\lambda) & T_R(\lambda) \end{pmatrix}, \quad (1.1.8)$$

où  $T_L, T_R$  sont les opérateurs de transmission et  $R, L$  sont les opérateurs de réflexion. Les premiers mesurent la partie d'un signal d'énergie  $\lambda$  transmise d'un bout à l'autre dans une expérience de diffusion alors que les derniers mesurent la partie d'un signal d'énergie  $\lambda$  réfléchi d'un bout sur lui-même ( $\{x = -\infty\}$  pour  $L$  et  $\{x = +\infty\}$  pour  $R$ ). En raison de la symétrie sphérique du modèle, l'opérateur de diffusion laisse invariant tous les espaces de Hilbert partiels  $\mathcal{H}_{kl}$  et peut donc être décomposé en une somme hilbertienne d'opérateurs unitaires agissant sur  $\mathbb{C}^2$ . On écrit ainsi

$$S(\lambda) = \sum_{(k,l) \in I} S_{kl}(\lambda), \quad S_{kl}(\lambda) := S(\lambda)|_{\mathcal{H}_{kl}}.$$

Puisque les opérateurs de Dirac unidimensionnels (1.1.7) dépendent uniquement de  $n = l + 1/2 \in \mathbb{N}^*$ , les matrices de diffusion partielles  $S_{kl}(\lambda)$  dépendent également uniquement de  $n$ . On utilisera ainsi la notation

$$S(\lambda, n) = \begin{pmatrix} T(\lambda, n) & R(\lambda, n) \\ L(\lambda, n) & T(\lambda, n) \end{pmatrix}. \quad (1.1.9)$$

Pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$ , on insiste sur le fait que la matrice de diffusion partielle  $S(\lambda, n)$  est une matrice unitaire qui encode la diffusion stationnaire à une énergie fixée  $\lambda \neq 0$  sur une harmonique sphérique généralisée donnée  $\mathcal{H}_{kl}$  avec  $n = l + 1/2$ . Comme précédemment les coefficients de transmission  $T(\lambda, n)$  correspondent à la partie du signal transmise d'un bout à l'autre alors que les coefficients de réflexion à gauche  $L(\lambda, n)$  et à droite  $R(\lambda, n)$  correspondent à la partie du signal réfléchi d'un bout sur lui-même.

Dans [DN11], Daudé et Nicoleau posent la question de savoir s'il est possible de déterminer de façon unique la métrique à partir de la connaissance d'un des opérateurs de réflexion  $L(\lambda)$  ou  $R(\lambda)$  à une énergie fixée  $\lambda \neq 0$ . En utilisant essentiellement la méthode de Complexification du Moment Angulaire (voir [Reg59] pour la première apparition de cette méthode et [Ram99] pour une application à un problème de diffusion inverse pour l'opérateur de Schrödinger), les auteurs répondent positivement à cette question sous des hypothèses plus faibles. Plus précisément, on énonce ici le résultat de diffusion inverse prouvé dans [DN11].

**Théoreme 1.1.1** (T. Daudé, F. Nicoleau (2011)). *Soit  $\Sigma = \mathbb{R} \times \mathbb{S}^2$  une VAHSS équipée de la métrique riemannienne*

$$\sigma = dx^2 + a(x)^{-2}d\omega^2,$$

*où la fonction  $a(x)$  vérifie les hypothèses (1.1.1)-(1.1.2). Soit  $\mathbb{D}_\sigma = \Gamma^1 D_x + a(x)\mathbb{D}_{\mathbb{S}^2}$  une expression de l'opérateur de Dirac non-massif associé à  $(\Sigma, \sigma)$ . On associe à l'équation d'évolution  $i\partial_t \psi = \mathbb{D}_\sigma \psi$ , où  $\psi \in \mathcal{H} = L^2(\Sigma; \mathbb{C}^2)$ , la famille dénombrable de matrices de diffusion partielles  $S(\lambda, n)$ , où  $\lambda \in \mathbb{R}$  et  $n \in \mathbb{N}^*$ , comme précédemment. On considère également un sous-ensemble  $\mathcal{L}$  de  $\mathbb{N}^*$  satisfaisant une condition de Müntz*

$$\sum_{n \in \mathcal{L}} \frac{1}{n} = \infty.$$

*Alors la connaissance de  $R(\lambda, n)$  ou  $L(\lambda, n)$  pour une énergie fixée  $\lambda \neq 0$  et pour tout  $n \in \mathcal{L}$  détermine de façon unique la fonction  $a(x)$  (et donc la métrique  $\sigma$ ) à translation près.*

**Remarque 1.1.2.** *Notons pour commencer que le résultat précédent n'est pas vrai si  $\lambda = 0$  (voir [DN11], Remark 3.7). Dans [DN11], Theorem 1.1, il est dit que la connaissance des coefficients de transmission  $T(\lambda, n)$  pour une énergie fixée  $\lambda \neq 0$  et pour tout  $n \in \mathcal{L}$  permet également de déterminer de façon unique la fonction  $a(x)$  à translation près. L'ingrédient principal de la preuve peut être trouvé dans la Proposition 3.13 de [DN11] qui énonce que si  $T(\lambda, n) = \tilde{T}(\lambda, n)$  pour tout  $n \in \mathcal{L}$ , alors les coefficients de réflexion  $L(\lambda, n)$  et  $\tilde{L}(\lambda, n)$*

(respectivement  $R(\lambda, n)$  et  $\tilde{R}(\lambda, n)$ ) coïncident à une constante multiplicative près. La preuve de ce résultat donnée dans [DN11] est malheureusement incomplète. Ce dernier point n'est donc pas si clair et pourrait même être faux. Cependant, dans ce chapitre, voir Proposition 1.7.5, Section 1.7, on prouve que la connaissance des coefficients de réflexion  $T(\lambda, n)$  pour tout  $n \in \mathcal{L}$  associée à la connaissance des coefficients de réflexion  $L(\lambda, k)$  pour un nombre fini d'entiers  $k$  (dépendant de la taille de  $a(x)$ ) et à une hypothèse technique sur la courbure sectionnelle aux bouts, détermine de façon unique la fonction  $a(x)$  à translation près (voir les commentaires avant le Théorème 1.1.5 et les détails dans la Section 1.4). La question de savoir si ces hypothèses supplémentaires sont nécessaires reste à ce jour ouverte.

Pour des Variétés Asymptotiquement Hyperboliques (notées VAH) sans symétries particulières, des résultats de diffusion directe et inverse pour des ondes scalaires ont été prouvés par Joshi et Sá Barreto dans [JSB00], par Sá Barreto dans [SB05], par Guillarmou et Sá Barreto dans [GSB08, GSB09] et par Isozaki et Kurylev dans [IK14]. Dans [JSB00], il est montré que les asymptotiques de la métrique d'une VAH sont déterminées de façon unique (à isométrie près) par la matrice de diffusion  $S(\lambda)$  à une énergie fixée  $\lambda$  en dehors d'un sous-ensemble discret de  $\mathbb{R}$ . Dans [SB05], il est prouvé que la métrique d'une VAH est déterminée de façon unique (à isométrie près) par la matrice de diffusion  $S(\lambda)$  pour tout  $\lambda \in \mathbb{R}$  en dehors d'un certain sous-espace. Des résultats similaires ont été obtenus récemment dans [IK14] pour une classe encore plus générale de VAH. Dans [GSB09] il est prouvé que pour des variétés de type Einstein connexes conformément compactes de dimension paire  $n + 1$  la matrice de diffusion à l'énergie  $n$  sur un sous-ensemble ouvert de son bord conforme détermine de façon unique la variété à isométrie près. On mentionne également le travail [Mar09] de Marazzi dans lequel l'auteur étudie le problème de diffusion inverse pour l'équation de Schrödinger stationnaire sur une variété conformément compacte ayant pour courbure sectionnelle  $-\alpha^2$  au bord avec un potentiel régulier ne s'annulant pas sur ce bord. L'auteur montre alors que la connaissance de la matrice de diffusion à deux énergies fixées  $\lambda_1$  et  $\lambda_2$ ,  $\lambda_1 \neq \lambda_2$ , dans un bon sous-ensemble de  $\mathbb{C}$ , détermine de façon unique  $\alpha$  ainsi que les séries de Taylor du potentiel et de la métrique au bord. Enfin, mentionnons également [BP11] dans lequel un problème inverse à partir des résonances est étudié dans une certaine sous-classe de VAH.

Les résultats de diffusion inverse de ce chapitre sont locaux par nature et dans le même esprit que les travaux [Ben01, GS00, Sim99, Tes09]. En effet, au lieu de supposer la connaissance exacte d'un des opérateurs de réflexion, on suppose que l'un d'eux est connu à une erreur près (voir ci-dessous). En utilisant les propriétés d'analyticité des

coefficients de réflexion  $L(\lambda, z)$  et  $R(\lambda, z)$  par rapport au moment angulaire complexe  $z$  et quelques résultats d'analyticité bien connus sur la transformée de Laplace (voir [Hor11, Sim99]), on est en mesure d'obtenir l'amélioration suivante du résultat précédent.

**Théoreme 1.1.3.** *Soient  $(\Sigma, \sigma)$  et  $(\Sigma, \tilde{\sigma})$  deux VAHSS. On note  $a(x)$  et  $\tilde{a}(x)$  les deux fonctions radiales définissant les métriques  $\sigma$  et  $\tilde{\sigma}$ . On définit*

$$A = \int_{\mathbb{R}} a(x) dx \quad \text{et} \quad \tilde{A} = \int_{\mathbb{R}} \tilde{a}(x) dx,$$

ainsi que les difféomorphismes

$$\begin{aligned} g : \mathbb{R} &\rightarrow (0, A) & \tilde{g} : \mathbb{R} &\rightarrow (0, \tilde{A}) \\ x &\mapsto g(x) = \int_{-\infty}^x a(s) ds & \text{et} & & x &\mapsto \tilde{g}(x) = \int_{-\infty}^x \tilde{a}(s) ds. \end{aligned}$$

On note également  $h = g^{-1} : (0, A) \rightarrow \mathbb{R}$  et  $\tilde{h} = \tilde{g}^{-1} : (0, \tilde{A}) \rightarrow \mathbb{R}$  leur difféomorphismes réciproques. Comme précédemment, on définit  $S(\lambda, n)$  et  $\tilde{S}(\lambda, n)$  les matrices de diffusion partielles correspondantes. Soient  $\lambda \neq 0$  une énergie fixée et  $0 < B < \min(A, \tilde{A})$ . Alors les assertions suivantes sont équivalentes :

$$(i) \quad L(\lambda, n) = \tilde{L}(\lambda, n) + O(e^{-2nB}), \quad n \rightarrow +\infty. \quad (1.1.10)$$

$$(ii) \quad \exists k \in \mathbb{Z}, \quad a(x) = \tilde{a}\left(x + \frac{k\pi}{\lambda}\right), \quad \forall x \leq h(B) = \tilde{h}(B) - \frac{k\pi}{\lambda}.$$

De façon symétrique, les assertions suivantes sont également équivalentes :

$$(iii) \quad R(\lambda, n) = \tilde{R}(\lambda, n) + O(e^{-2nB}), \quad n \rightarrow +\infty. \quad (1.1.11)$$

$$(iv) \quad \exists k \in \mathbb{Z}, \quad a(x) = \tilde{a}\left(x + \frac{k\pi}{\lambda}\right), \quad \forall x \geq h(A - B) = \tilde{h}(\tilde{A} - B) - \frac{k\pi}{\lambda}.$$

Les résultats précédents énoncent que la connaissance *partielle* des coefficients de réflexion dans le sens de (1.1.10) ou (1.1.11) permet de déterminer de façon unique la métrique  $\sigma$  dans des voisinages des deux bouts  $\{x = \pm\infty\}$ . La taille des voisinages dépend de la taille des termes d'erreurs dans (1.1.10) - (1.1.11). Bien sûr,  $h(B)$  (respectivement  $h(A - B)$ ) dépend de la métrique  $a(x)$  qui est a priori inconnue, mais il n'est pas difficile de prouver en utilisant (1.1.2) que  $h(B) \sim \frac{1}{\kappa_-} \log B$  quand  $B \rightarrow 0$  et de même que  $h(A - B) \sim -\frac{1}{\kappa_+} \log(A - B)$  lorsque  $B \rightarrow A$ . On insiste également sur le fait que les "gravités de surface"  $\kappa_{\pm}$  peuvent être explicitement retrouvée à partir des asymptotiques de  $L(\lambda, n)$  ou  $R(\lambda, n)$ ,  $n \rightarrow +\infty$  (voir [DN11], Theorem 4.22).

Comme conséquence du résultat précédent, on obtient immédiatement le résultat d'*unicité globale* suivant pour la métrique d'une VAHSS. Ce résultat améliore le résultat obtenu dans [DN11] et énoncé dans le Théorème 1.1.1.

**Corollaire 1.1.4.** *Supposons que pour un  $C \geq \min(A, \tilde{A})$  donné et  $\lambda \neq 0$  une énergie fixée, l'une des assertions suivantes soit vérifiée :*

$$(i) \quad L(\lambda, n) = \tilde{L}(\lambda, n) + O\left(e^{-2nC}\right), \quad n \rightarrow +\infty.$$

$$(ii) \quad R(\lambda, n) = \tilde{R}(\lambda, n) + O\left(e^{-2nC}\right), \quad n \rightarrow +\infty.$$

Alors, il existe  $k \in \mathbb{Z}$  tel que  $a(x) = \tilde{a}\left(x + \frac{k\pi}{\lambda}\right)$  pour tout  $x \in \mathbb{R}$ .

*Démonstration.* Traitons par exemple le cas (i) et supposons que  $A \leq \tilde{A}$ . D'après notre hypothèse, pour tout  $B < A$ , on a

$$L(\lambda, n) = \tilde{L}(\lambda, n) + O\left(e^{-2nB}\right).$$

Ainsi le Théorème 1.1.3 implique que  $a(x) = \tilde{a}\left(x + \frac{k\pi}{\lambda}\right)$ , pour tout  $x \leq h(B)$ . Le résultat suit alors en faisant tendre  $B$  vers  $A$  et en utilisant que  $\lim_{X \rightarrow A} h(X) = +\infty$ . On note que l'on obtient également que  $A = \tilde{A}$ .  $\square$

On propose une interprétation possible du résultat d'*unicité locale* énoncé dans le Théorème 1.1.3. Considérons par exemple les coefficients de réflexion  $L(\lambda, n)$  et rappelons qu'ils encodent l'expérience de diffusion suivante : une onde avec une énergie  $\lambda$  est envoyée d'un bout  $\{x = -\infty\}$  et évolue sur une VAHSS.  $L(\lambda, n)$  mesure alors la partie de cette onde qui est réfléchi sur le même bout  $\{x = -\infty\}$  dans un futur lointain. Notre résultat affirme que si l'on connaît  $L(\lambda, n)$  à une erreur près de la forme  $O\left(e^{-2nB}\right)$ , alors la métrique est déterminée de façon unique dans un voisinage de  $\{x = -\infty\}$ , la taille du voisinage dépendant de la constante  $B$  définissant le terme d'erreur. On peut alors en déduire que, sous nos hypothèses, l'onde envoyée de  $\{x = -\infty\}$  n'a pas le temps de voyager dans toute la variété avant d'être mesurée à nouveau dans le bout  $\{x = -\infty\}$ . Ceci explique de façon heuristique pourquoi la connaissance partielle des coefficients de réflexion  $L(\lambda, n)$ , dans le sens précis donné par nos hypothèses, n'est pas suffisant pour déterminer entièrement la métrique.

Enfin, lorsque l'on utilise les coefficients de transmission comme point de départ de notre problème inverse, on obtient un résultat différent par nature de celui obtenu avec les coefficients de réflexion. En effet, on obtient un résultat d'*unicité globale*. Notons que -



comme mentionné dans la Remarque 1.1.2 - on ne suppose pas seulement la connaissance des coefficients de transmission à une erreur près, *mais également* que les coefficients de réflexion  $L(\lambda, k)$  et  $\tilde{L}(\lambda, k)$  sont égaux pour un nombre fini (dépendant de la taille des deux métriques qui sont a priori inconnues) d'entiers  $k$  et que les courbures sectionnelles  $\kappa_{\pm}$  vérifient une hypothèse technique, pour obtenir ce résultat d'unicité globale.

Expliquons pourquoi cette condition d'égalité des coefficients de réflexion pour un nombre fini d'entiers est vraiment nécessaire. On renvoie le lecteur à [FY05] pour plus de détails sur les notions de fonctions caractéristiques et de Weyl-Titchmarsh pour un problème de Sturm-Liouville singulier utilisées ci-dessous. Dans la Section 1.3, nous montrerons que l'inverse du coefficient de transmission  $T(\lambda, z)$ , (on autorise le moment angulaire  $n$  à être un nombre complexe  $z$  ici), n'est rien d'autre que la fonction caractéristique  $d(\lambda, z)$  associée à l'équation de Sturm-Liouville singulière sur  $(0, A)$  :

$$y'' + q(X)y = z^2 y, \quad (1.1.12)$$

où

$$q(X) = \frac{\lambda^2}{a^2(x)} + i\lambda \frac{a'(x)}{a^3(x)},$$

et

$$X = \int_{-\infty}^x a(t)dt \quad \text{et} \quad A = \int_{\mathbb{R}} a(x)dx,$$

avec certaines conditions de bords singulières. On note en passant que la connaissance du potentiel  $q(X)$  est équivalente à la connaissance de la métrique  $a(x)$  à un certain changement de variable près. Il est bien connu (voir [FY05], Theorem 3.6) que la fonction caractéristique  $d(\lambda, z)$  (et ainsi de façon équivalente les coefficients de transmission  $T(\lambda, z)$ ) ne contient pas assez d'informations pour déterminer de façon unique le potentiel  $q(X)$ . Pour avoir un espoir de déterminer de façon unique le potentiel, on suppose en général qu'une *seconde* fonction caractéristique  $\Delta(\lambda, z)$  associée à l'équation de Sturm-Liouville singulière (1.1.12) avec des conditions de bords singulières différentes est connue. Cette seconde fonction caractéristique est donnée ici (avec nos notations) par :

$$\Delta(\lambda, z) = -iz a_{L3}(\lambda, z). \quad (1.1.13)$$

Le quotient de ces deux fonctions caractéristiques définit (au signe près) ce que l'on appelle la fonction de Weyl-Titchmarsh généralisée (WT),  $M(\lambda, z)$ , associée à (1.1.12) :

$$M(\lambda, z) = -\frac{d(\lambda, z)}{\Delta(\lambda, z)} = \frac{1}{iz} \frac{a_{L1}(\lambda, z)}{a_{L3}(\lambda, z)} = \frac{1}{iz} \frac{1}{L(\lambda, z)}. \quad (1.1.14)$$

Un résultat de type Borg-Marchenko a alors été prouvé dans [FY05], Theorem 3.3. Ce résultat affirme que la connaissance de la fonction de WT,  $M(\lambda, z)$ , pour tout  $z \in \mathbb{C}$  permet de déterminer de façon unique le potentiel  $q(X)$ . En réalité, grâce à la méthode de Complexification du Moment Angulaire, il suffit de connaître  $M(\lambda, n)$  pour tout  $n$  parcourant un ensemble infini d'entiers satisfaisant une condition de Müntz (voir [DN11], Theorem 1.1). Il est également montré dans [FY05], Theorem 3.6, qu'il est suffisant de connaître deux suites infinies de zéros des fonctions caractéristiques  $d(\lambda, z)$  et  $\Delta(\lambda, z)$  (qui correspondent à deux spectres différents pour (1.1.12)) pour déterminer le potentiel. On insiste sur le fait que le Théorème suivant est en réalité une amélioration des résultats inverses spectraux précédents. On montre en effet qu'il est suffisant de connaître  $d(\lambda, n)$  pour  $n$  grand (à une erreur près) et  $\Delta(\lambda, k)$  *seulement pour un nombre fini* d'entiers, (respectivement de connaître  $T(\lambda, n)$  pour  $n$  grand à une erreur près et  $L(\lambda, k)$  pour un nombre fini d'entiers  $k$ ) afin de déterminer de façon unique le potentiel  $q$  (respectivement la métrique  $a$ ). On note que, ce nombre fini d'entiers peut dépendre de la métrique que l'on cherche à déterminer et qui est donc a priori inconnue.

**Théoreme 1.1.5.** *Soient  $(\Sigma, \sigma)$  et  $(\Sigma, \tilde{\sigma})$  deux VAHSS. Supposons que*

$$\frac{1}{\kappa_+} + \frac{1}{\kappa_-} < 0 \quad \text{et} \quad \frac{1}{\tilde{\kappa}_+} + \frac{1}{\tilde{\kappa}_-} < 0,$$

*et que pour une énergie fixée  $\lambda \neq 0$  et un certain  $B > \max(A, \tilde{A})$ ,*

$$T(\lambda, n) = \tilde{T}(\lambda, n) + O\left(e^{-2nB}\right), \quad n \rightarrow +\infty. \quad (1.1.15)$$

*Supposons également que*

$$L(\lambda, k) = \tilde{L}(\lambda, k), \quad (1.1.16)$$

*pour un nombre fini mais suffisamment grand (dépendant des métriques  $\sigma$  et  $\tilde{\sigma}$ ) d'indices  $k \in \mathbb{N}$ . Alors il existe une constante  $\alpha \in \mathbb{R}$  telle que*

$$\tilde{a}(x) = a(x + \alpha).$$

*Par conséquent, les deux VAHSS  $(\Sigma, \sigma)$  et  $(\Sigma, \tilde{\sigma})$  coïncident à une isométrie près.*

Faisons quelques commentaires sur ce résultat. Pour commencer, fournissons une raison heuristique pour laquelle nous n'obtenons pas un résultat *d'unicité locale* lorsque l'on suppose connus les coefficients de transmission à une erreur près. Ces coefficients mesurent - par définition - la partie d'une onde transmise d'un bout, disons  $\{x = -\infty\}$ ,

à l'autre bout  $\{x = +\infty\}$ . Dans notre cas, quand les VAHSS ont seulement deux bouts, l'onde transmise a ainsi le temps de se propager dans toute la variété. Il est donc naturel que les coefficients de transmission encodent *toute* l'information de la VAHSS.

Dans un second temps, on rappelle que les asymptotiques des coefficients de transmission lorsque  $n$  tend vers l'infini ont été calculées dans [DN11]. Précisément, on a, lorsque  $n \rightarrow +\infty$ ,

$$|T(\lambda, n)| \sim C e^{-nA}, \quad |\tilde{T}(\lambda, n)| \sim \tilde{C} e^{-n\tilde{A}}.$$

Ainsi, la condition sur  $B$  dans le Théorème 1.1.5 ne peut pas être plus faible que  $B > \frac{1}{2} \max(A, \tilde{A})$ . On note alors que l'assertion (1.1.15) implique immédiatement que  $A = \tilde{A}$  grâce aux asymptotiques précédentes. On insiste enfin sur le fait que l'obtention d'un résultat d'unicité globale dans le cas où  $\frac{1}{2} \max(A, \tilde{A}) < B \leq \max(A, \tilde{A})$  reste une question encore ouverte.

Ce chapitre est organisé de la façon suivante. Dans la Section 1.2, on rappelle comment obtenir l'équation de Dirac sur une variété courbe et on utilise ce formalisme pour obtenir une représentation de l'opérateur de Dirac non-massif sur une VAHSS. Dans la Section 1.3, on rappelle les principaux résultats de [DN11] où une description complète de la diffusion stationnaire correspondant aux champs de Dirac non-massifs évoluant sur une VAHSS a été obtenue. Dans la Section 1.4, on prouve nos principaux résultats à savoir le Théorème 1.1.3 et le Théorème 1.1.5. Dans la Section 1.5 on propose une application de nos résultats d'unicité locale sur les VAHSS dans le contexte des trous noirs de type Reissner-Nordström-de Sitter. Dans la Section 1.6 on donne une reformulation des hypothèses (1.1.10), (1.1.11) et (1.1.15), n'utilisant pas la décomposition sur les harmoniques sphériques généralisées, en termes d'estimations sur les opérateurs de réflexion et de transmission globaux vus comme des opérateurs sur  $L^2(\mathbb{S}^2)$ . Enfin, dans la Section 1.7 on propose un Addendum à propos du coefficient de transmission.

## 1.2 Modèle

Puisque l'équation de Dirac est une équation relativiste, on préfère travailler directement sur une variété lorentzienne de dimension quatre  $(M, \tau)$  définie par

$$M = \mathbb{R}_t \times \Sigma,$$

et munie de la métrique

$$\tau = dt^2 - \sigma,$$

où  $(\Sigma, \sigma)$  est la VAHSS que l'on souhaite étudier. On rappelle ci-dessous comment établir l'équation de Dirac non-massive sur de telles variétés de dimension quatre et on obtient une représentation de cette équation que l'on met sous la forme hamiltonienne générique

$$i\partial_t\psi = \mathbb{D}_\tau\psi.$$

Nous verrons dans la Remarque 1.2.1 que cette procédure fournit une forme équivalente de l'équation de Dirac sans masse

$$i\partial_t\psi = \mathbb{D}_\sigma\psi,$$

que l'on aurait obtenue est travaillant sur la variété riemannienne de dimension trois  $(\Sigma, \sigma)$ . En d'autres termes, les opérateurs de Dirac  $\mathbb{D}_\tau$  et  $\mathbb{D}_\sigma$  que l'on obtient avec ces deux formalismes sont unitairement équivalents. On préfère cependant travailler du point de vue relativiste puisque l'on est également intéressé par l'application de nos résultats à des espaces-temps venant de la Relativité Générale et plus précisément à des trous noirs comme nous le verrons dans la Section 1.5.

### 1.2.1 Formalisme pour l'équation de Dirac sans masse

Pour établir l'équation de Dirac sans masse dans un espace-temps courbe de dimension quatre  $M$  équipé d'une métrique lorentzienne  $\tau$  de signature  $(1, -1, -1, -1)$ , on utilise le formalisme de base orthonormale de Cartan comme expliqué par exemple dans [CP82] ou dans un cadre plus relativiste dans [Nic95]. On note  $\{e_A\}_{A=0,1,2,3}$  une base de Lorentz locale, *i.e.* un ensemble de champs de vecteurs satisfaisant  $\tau(e_A, e_B) = \eta_{AB}$  où  $\eta_{AB} = \text{diag}(1, -1, -1, -1)$  est la métrique de Lorentz plate. On note également  $\{e^A\}_{A=0,1,2,3}$  l'ensemble des 1-formes duales de la base  $\{e_A\}$ . Les lettres latines  $A, B$  désignent dans ce qui suit les indices correspondant à la base de Lorentz locale, alors que les lettres grecques  $\mu, \nu$  désignent les indices des coordonnées de l'espace-temps de dimension quatre. L'équation de Dirac *sans masse* prend alors la forme générique suivante

$$\mathbb{D}\phi = \gamma^A(\partial_A + \Gamma_A)\phi = 0. \tag{1.2.1}$$

Ici, les  $\gamma^A$  sont les matrices de Dirac qui satisfont les relations d'anti-commutativité

$$\{\gamma^A, \gamma^B\} = \gamma^A\gamma^B + \gamma^B\gamma^A = 2\eta^{AB}. \tag{1.2.2}$$

Les opérateurs différentiels  $\partial_A$  sont donnés en termes d'opérateurs différentiels locaux par  $\partial_A = e_A^\mu \partial_\mu$  et les  $\Gamma_A$  sont les composantes de la connexion spinorielle  $\Gamma = \Gamma_A e^A = \Gamma_\mu dx^\mu$  dans la base locale de Lorentz. Pour dériver ces dernières, on commence par calculer la 1-forme  $\omega_{AB} = \omega_{AB\mu} dx^\mu = f_{ABC} e^C$  à l'aide de la première équation structurelle de Cartan et de la condition d'anti-symétrie

$$de^A + \omega_B^A \wedge e^B = 0, \quad \omega_{AB} = \eta_{AC} \omega_B^C = -\omega_{BA}. \quad (1.2.3)$$

On se sert ici de la convention de sommation d'Einstein et on utilise la métrique plate  $\eta_{AB}$  ou son inverse  $\eta^{AB}$  pour monter ou descendre les indices latins. Avec cette définition, la connexion spinorielle  $\Gamma$  est définie par

$$\Gamma = \frac{1}{8} [\gamma^A, \gamma^B] \omega_{AB} = \frac{1}{4} \gamma^A \gamma^B \omega_{AB} = \frac{1}{4} \gamma^A \gamma^B f_{ABC} e^C. \quad (1.2.4)$$

### 1.2.2 Équation de Dirac sur une VAHSS

On utilise à présent le formalisme précédent pour établir l'équation de Dirac sans masse sur la variété lorentzienne  $(M, \tau)$  donnée par

$$M = \mathbb{R}_t \times \mathbb{R}_x \times \mathbb{S}_{\theta, \varphi}^2,$$

et

$$\tau = dt^2 - dx^2 - a(x)^{-2} (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\varphi^2),$$

où

$$a \in C^2(\mathbb{R}), \quad a > 0.$$

La symétrie sphérique de la métrique nous amène à un choix naturel de base de Lorentz locale

$$e_0 = \partial_t, \quad e_1 = \partial_x, \quad e_2 = a(x) \partial_\theta, \quad e_3 = \frac{a(x)}{\sin \theta} \partial_\varphi. \quad (1.2.5)$$

Les 1-formes duales sont alors données par

$$e^0 = dt, \quad e^1 = dx, \quad e^2 = a(x)^{-1} d\theta, \quad e^3 = \frac{\sin \theta}{a(x)} d\varphi, \quad (1.2.6)$$

et les dérivées extérieures des  $e^A$  sont

$$de^0 = 0, \quad de^1 = 0, \quad de^2 = \frac{a'(x)}{a(x)} e^2 \wedge e^1, \quad de^3 = \frac{a'(x)}{a(x)} e^3 \wedge e^1 - a(x) \cot \theta e^3 \wedge e^2.$$

En utilisant (1.2.3), on obtient alors

$$\omega_1^0 = \omega_2^0 = \omega_3^0 = 0, \quad \omega_2^1 = \frac{a'(x)}{a(x)} e^2, \quad \omega_3^1 = \frac{a'(x)}{a(x)} e^3, \quad \omega_3^2 = -a(x) \cot \theta e^3,$$

ou de façon équivalente

$$\omega_{01} = \omega_{02} = \omega_{03} = 0, \quad \omega_{12} = -\frac{a'(x)}{a(x)} e^2, \quad \omega_{13} = -\frac{a'(x)}{a(x)} e^3, \quad \omega_{23} = a(x) \cot \theta e^3.$$

On en déduit que

$$\begin{aligned} \Gamma &= \frac{1}{4} \gamma^A \gamma^B \omega_{AB} = \left( -\frac{a'(x)}{2a(x)} \gamma^1 \gamma^2 \right) e^2 + \left( -\frac{a'(x)}{2a(x)} \gamma^1 \gamma^3 + \frac{a(x) \cot \theta}{2} \gamma^2 \gamma^3 \right) e^3 \\ &= \Gamma_A e^A. \end{aligned} \tag{1.2.7}$$

L'équation de Dirac sans masse  $\gamma^A (\partial_A + \Gamma_A) \phi = 0$  sur  $(M, \tau)$  prend ainsi la forme

$$\begin{aligned} &\left[ \gamma^0 \partial_t + \gamma^1 \partial_x + \gamma^2 \left( a(x) \partial_\theta - \frac{a'(x)}{2a(x)} \gamma^1 \gamma^2 \right) \right. \\ &\quad \left. + \gamma^3 \left( \frac{a(x)}{\sin \theta} \partial_\varphi - \frac{a'(x)}{2a(x)} \gamma^1 \gamma^3 + \frac{a(x) \cot \theta}{2} \gamma^2 \gamma^3 \right) \right] \phi = 0, \end{aligned}$$

ou, en utilisant (1.2.2),

$$\left[ \gamma^0 \partial_t + \gamma^1 \partial_x + a(x) \left( \left( \partial_\theta - \frac{\cot \theta}{2} \right) \gamma^2 + \frac{1}{\sin \theta} \partial_\varphi \gamma^3 \right) - \frac{a'(x)}{a(x)} \gamma^1 \right] \phi = 0.$$

On peut se débarrasser de certains potentiels en considérant des spineurs à poids

$$\psi = a(x)^{-1} \phi. \tag{1.2.8}$$

En effet,  $\psi$  satisfait alors l'équation

$$\left[ \gamma^0 \partial_t + \gamma^1 \partial_x + a(x) \left( \left( \partial_\theta - \frac{\cot \theta}{2} \right) \gamma^2 + \frac{1}{\sin \theta} \partial_\varphi \gamma^3 \right) \right] \psi = 0.$$

On met finalement cette équation sous forme hamiltonienne. Le spineur  $\psi$  satisfait alors

$$i \partial_t \psi = \mathbb{D} \psi,$$

où l'opérateur de Dirac  $\mathbb{D}$  est donné par

$$\mathbb{D} = \gamma^0 \gamma^1 D_x + a(x) \left[ \left( D_\theta + \frac{i \cot \theta}{2} \right) \gamma^0 \gamma^2 + \frac{1}{\sin \theta} D_\varphi \gamma^0 \gamma^3 \right],$$

et

$$D_x = -i\partial_x, \quad D_\theta = -i\partial_\theta, \quad D_\varphi = -i\partial_\varphi.$$

Introduisons maintenant quelques notations. On note

$$\Gamma^1 = \gamma^0 \gamma^1, \quad \Gamma^2 = \gamma^0 \gamma^2, \quad \Gamma^3 = \gamma^0 \gamma^3.$$

À partir de (1.2.2), il est clair que les matrices de Dirac  $\Gamma^1, \Gamma^2, \Gamma^3$  satisfont les relations d'anti-commutativité habituelles

$$\{\Gamma^i, \Gamma^j\} = 2\delta_{ij}, \quad \forall i, j = 1, 2, 3. \quad (1.2.9)$$

On choisit les représentations suivantes pour les matrices de Dirac

$$\Gamma^1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad \Gamma^2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \Gamma^3 = \begin{pmatrix} 0 & i \\ -i & 0 \end{pmatrix}. \quad (1.2.10)$$

On note également

$$\mathbb{D}_{\mathbb{S}^2} = \Gamma^2 \left( D_\theta + \frac{i \cot \theta}{2} \right) + \Gamma^3 \frac{1}{\sin \theta} D_\varphi, \quad (1.2.11)$$

qui est une expression de l'opérateur de Dirac intrinsèque sur  $\mathbb{S}^2$ . Avec ces notations, l'équation de Dirac sans masse sur  $(M, \tau)$  prend la forme hamiltonienne suivante

$$i\partial_t \psi = \mathbb{D} \psi, \quad \text{où} \quad \mathbb{D} = \Gamma^1 D_x + a(x) \mathbb{D}_{\mathbb{S}^2}. \quad (1.2.12)$$

**Remarque 1.2.1.** *Considérons la variété riemannienne  $\Sigma = \mathbb{R}_x \times \mathbb{S}_{\theta, \varphi}^2$  équipée de la métrique  $\sigma = dx^2 + a(x)^{-2} d\omega^2$  où  $d\omega^2$  désigne la métrique euclidienne sur  $\mathbb{S}^2$ . En utilisant le formalisme de base orthogonale de Cartan décrit précédemment, on peut associer à  $(\Sigma, \sigma)$  un opérateur de Dirac  $\mathbb{D}_\sigma$  et considérer l'équation de Dirac associée*

$$i\partial_t \psi = \mathbb{D}_\sigma \psi, \quad (1.2.13)$$

où  $\psi$  est donné par (1.2.8).

L'équation de Dirac (1.2.13) est celle obtenue si l'on adopte le point de vue de Schrödinger, c'est-à-dire si l'on considère l'évolution de champs de Dirac sur la variété riemannienne

$(\Sigma, \sigma)$ . D'un autre côté, l'équation de Dirac (1.2.12) est celle que l'on obtient si l'on adopte le point de vue relativiste, c'est-à-dire qu'elle est l'équation de Dirac naturelle associée à la variété lorentzienne de dimension quatre  $(M = \mathbb{R}_t \times \Sigma, \tau = dt^2 - \sigma)$ . Ces deux points de vue sont équivalents en ce sens que les opérateurs de Dirac correspondants  $\mathbb{D}$  et  $\mathbb{D}_\sigma$  sont unitairement équivalents. Ceci peut également être vu par un calcul direct. À chaque point de  $(\Sigma, \sigma)$ , on associe la base orthonormale locale

$$e_1 = \partial_x, \quad e_2 = a(x)\partial_\theta, \quad e_3 = \frac{a(x)}{\sin \theta}\partial_\varphi.$$

On note que les champs de vecteurs  $\{e_A\}_{A=1,2,3}$  vérifient  $\sigma(e_A, e_B) = \delta_{AB}$  où  $\delta_{AB} = \text{diag}(1, 1, 1)$  est la métrique riemannienne plate en dimension trois. On suit à présent la même procédure que précédemment (en introduisant toujours le spineur à poids (1.2.8)) et on obtient alors l'équation de Dirac suivante

$$i\partial_t\psi = \mathbb{D}\psi, \quad \mathbb{D} = \gamma^1 D_x + a(x) \left[ \gamma^2 \left( D_\theta + \frac{i \cot \theta}{2} \right) + \gamma^3 \frac{1}{\sin \theta} D_\varphi \right],$$

où les matrices de Dirac  $\gamma^1, \gamma^2, \gamma^3$  vérifient la formule d'anti-commutativité (1.2.9). On conclut ainsi que les équations de Dirac (1.2.12) et (1.2.13) diffèrent uniquement d'un choix de représentations équivalentes des matrices de Dirac satisfaisant (1.2.9). Il est cependant connu que ces deux choix de représentations mènent à des opérateurs de Dirac unitairement équivalents.

## 1.3 Diffusion stationnaire

Dans cette Section, on rappelle la construction stationnaire des matrices de diffusion  $S(\lambda, n)$  pour une énergie fixée  $\lambda \in \mathbb{R}$  et pour des moments angulaires  $n \in \mathbb{N}^*$  (on renvoie à [AKvdM00] et [DN11] pour plus de détails). On commence par considérer les solutions stationnaires de l'Équation (1.2.12) restreinte à chaque harmonique sphérique spinorielle à poids, *i.e.* les solutions de

$$[\Gamma^1 D_x - na(x)\Gamma^2]\psi = \lambda\psi, \quad \forall n \in \mathbb{N}^*. \quad (1.3.1)$$

Pour  $\lambda \in \mathbb{R}$ , on définit la solution de Jost à gauche  $F_L(x, \lambda, n)$  et la solution de Jost à droite  $F_R(x, \lambda, n)$  comme étant les matrices  $2 \times 2$  solutions de (1.3.1) satisfaisant les



asymptotiques suivantes

$$F_L(x, \lambda, n) = e^{i\Gamma^1 \lambda x} (I_2 + o(1)), \quad x \rightarrow +\infty, \quad (1.3.2)$$

$$F_R(x, \lambda, n) = e^{i\Gamma^1 \lambda x} (I_2 + o(1)), \quad x \rightarrow -\infty. \quad (1.3.3)$$

De (1.3.1), (1.3.2) et (1.3.3), il est facile de déduire que ces solutions (si elles existent) doivent satisfaire les équations intégrales

$$F_L(x, \lambda, n) = e^{i\Gamma^1 \lambda x} - in\Gamma^1 \int_x^{+\infty} e^{-i\Gamma^1 \lambda(y-x)} a(y) \Gamma^2 F_L(y, \lambda, n) dy, \quad (1.3.4)$$

$$F_R(x, \lambda, n) = e^{i\Gamma^1 \lambda x} + in\Gamma^1 \int_{-\infty}^x e^{-i\Gamma^1 \lambda(y-x)} a(y) \Gamma^2 F_R(y, \lambda, n) dy. \quad (1.3.5)$$

Puisque le potentiel  $a$  appartient à  $L^1(\mathbb{R})$ , on peut montrer par récurrence que les équations intégrales (1.3.4) et (1.3.5) ont une unique solution et que

$$\|F_L(x, \lambda, n)\| \leq e^{n \int_x^{+\infty} a(s) ds} \quad \text{et} \quad \|F_R(x, \lambda, n)\| \leq e^{n \int_{-\infty}^x a(s) ds}.$$

Puisque les solutions de Jost sont des matrices fondamentales de (1.3.1), il existe une matrice  $2 \times 2$  notée  $A_L(\lambda, n)$  telle que  $F_L(x, \lambda, n) = F_R(x, \lambda, n) A_L(\lambda, n)$ . De (1.3.3) et (1.3.4), on déduit l'expression suivante de  $A_L(\lambda, n)$

$$A_L(\lambda, n) = I_2 - in\Gamma^1 \int_{\mathbb{R}} e^{-i\Gamma^1 \lambda y} a(y) \Gamma^2 F_L(y, \lambda, n) dy. \quad (1.3.6)$$

De plus, la matrice  $A_L(\lambda, n)$  vérifie l'égalité suivante (voir [AKvdM00], Proposition 2.2)

$$A_L^*(\lambda, n) \Gamma^1 A_L(\lambda, n) = \Gamma^1, \quad \forall \lambda \in \mathbb{R}, \quad \forall n \in \mathbb{N}. \quad (1.3.7)$$

On note que, en utilisant la notation

$$A_L(\lambda, n) = \begin{pmatrix} a_{L1}(\lambda, n) & a_{L2}(\lambda, n) \\ a_{L3}(\lambda, n) & a_{L4}(\lambda, n) \end{pmatrix}, \quad (1.3.8)$$

l'égalité (1.3.7) peut être réécrite en composantes sous la forme

$$\begin{aligned} |a_{L1}(\lambda, n)|^2 - |a_{L3}(\lambda, n)|^2 &= 1, \\ |a_{L4}(\lambda, n)|^2 - |a_{L2}(\lambda, n)|^2 &= 1, \\ a_{L1}(\lambda, n) \overline{a_{L2}(\lambda, n)} - a_{L3}(\lambda, n) \overline{a_{L4}(\lambda, n)} &= 0. \end{aligned} \quad (1.3.9)$$

Les matrices  $A_L(\lambda, n)$  encodent toute l'information de diffusion de l'Équation (1.3.1). En particulier, il est montré dans [AKvdM00] que la matrice de diffusion  $S(\lambda, n)$  possède la représentation

$$S(\lambda, n) = \begin{pmatrix} T(\lambda, n) & R(\lambda, n) \\ L(\lambda, n) & T(\lambda, n) \end{pmatrix}, \quad (1.3.10)$$

où

$$T(\lambda, n) = \frac{1}{a_{L1}(\lambda, n)}, \quad R(\lambda, n) = -\frac{a_{L2}(\lambda, n)}{a_{L1}(\lambda, n)}, \quad L(\lambda, n) = \frac{a_{L3}(\lambda, n)}{a_{L1}(\lambda, n)}. \quad (1.3.11)$$

**Remarque 1.3.1.** On déduit de (1.3.4) que si l'on introduit le nouveau potentiel  $\tilde{a}(x) = a(x + c)$  alors les solutions de Jost associées satisfont

$$\tilde{F}_L(x, \lambda, n) = F_L(x + c, \lambda, n)e^{-i\Gamma^1 \lambda c}. \quad (1.3.12)$$

Ainsi, il suit de (1.3.6) que

$$\tilde{A}_L(\lambda, n) = e^{i\Gamma^1 \lambda c} A_L(\lambda, n) e^{-i\Gamma^1 \lambda c}, \quad (1.3.13)$$

et donc, en utilisant (1.3.10) et (1.3.11), on conclut que

$$\tilde{S}(\lambda, n) = e^{i\Gamma^1 \lambda c} S(\lambda, n) e^{-i\Gamma^1 \lambda c}. \quad (1.3.14)$$

Ainsi,

$$\begin{pmatrix} \tilde{T}(\lambda, n) & \tilde{R}(\lambda, n) \\ \tilde{L}(\lambda, n) & \tilde{T}(\lambda, n) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} T(\lambda, n) & e^{2i\lambda c} R(\lambda, n) \\ e^{-2i\lambda c} L(\lambda, n) & T(\lambda, n) \end{pmatrix}. \quad (1.3.15)$$

Les coefficients de transmission  $T(\lambda, n)$  sont donc invariants par translations radiales du potentiel  $a$ , alors que les coefficients de réflexion  $L(\lambda, n)$  et  $R(\lambda, n)$  sont invariants par l'ensemble des translations radiales définies par  $\tilde{a}(x) = a\left(x + \frac{k\pi}{\lambda}\right)$  où  $k \in \mathbb{Z}$  et  $\lambda \neq 0$ .

En suivant une idée originale due à Regge [Reg59], nous autorisons le moment angulaire  $n \in \mathbb{N}$  à prendre des valeurs complexes  $z$  et nous étudions les propriétés d'analyticité des données de diffusion par rapport à cette variable  $z \in \mathbb{C}$ . Plus précisément, il est montré dans [DN11] que l'on peut définir pour  $z \in \mathbb{C}$ , les solutions de Jost  $F_L(x, \lambda, z)$  et  $F_R(x, \lambda, z)$  qui sont les uniques solutions de l'équation stationnaire

$$[\Gamma^1 D_x - za(x)\Gamma^2]\psi = \lambda\psi, \quad z \in \mathbb{C}, \quad (1.3.16)$$

satisfaisant respectivement les asymptotiques (1.3.2) et (1.3.3). De même, on peut définir

la matrice  $A_L(\lambda, z)$  pour tout  $z \in \mathbb{C}$ . Toutes ces fonctions à valeurs matricielles sont analytiques en la variable complexe  $z \in \mathbb{C}$ . On résume leurs propriétés dans le Lemme suivant.

**Lemme 1.3.2.** (i) Soit  $A = \int_{\mathbb{R}} a(x)dx$ . Alors

$$|a_{L1}(\lambda, z)|, |a_{L4}(\lambda, z)| \leq \cosh(A|z|), \quad \forall z \in \mathbb{C}, \quad (1.3.17)$$

$$|a_{L2}(\lambda, z)|, |a_{L3}(\lambda, z)| \leq \sinh(A|z|), \quad \forall z \in \mathbb{C}. \quad (1.3.18)$$

(ii) Les fonctions  $a_{L1}(\lambda, z)$  et  $a_{L4}(\lambda, z)$  sont entières et paires en  $z$  alors que les fonctions  $a_{L2}(\lambda, z)$  et  $a_{L3}(\lambda, z)$  sont entières et impaires en  $z$ . De plus, elles satisfont les symétries

$$a_{L1}(\lambda, z) = \overline{a_{L4}(\lambda, \bar{z})}, \quad \forall z \in \mathbb{C}, \quad (1.3.19)$$

$$a_{L2}(\lambda, z) = \overline{a_{L3}(\lambda, \bar{z})}, \quad \forall z \in \mathbb{C}. \quad (1.3.20)$$

(iii) Les relations suivantes sont vérifiées pour tout  $z \in \mathbb{C}$

$$a_{L1}(\lambda, z)\overline{a_{L1}(\lambda, \bar{z})} - a_{L3}(\lambda, z)\overline{a_{L3}(\lambda, \bar{z})} = 1, \quad (1.3.21)$$

$$a_{L4}(\lambda, z)\overline{a_{L4}(\lambda, \bar{z})} - a_{L2}(\lambda, z)\overline{a_{L2}(\lambda, \bar{z})} = 1. \quad (1.3.22)$$

Pour le moment, on a montré que les composantes de la matrice  $A_L(\lambda, z)$  sont des fonctions entières et de type exponentiel en la variable  $z$ . Plus précisément, de (1.3.17) et (1.3.18), on déduit que

$$|a_{Lj}(\lambda, z)| \leq e^{A|z|}, \quad \forall z \in \mathbb{C}, \quad j = 1, \dots, 4. \quad (1.3.23)$$

En utilisant les relations (1.3.21)-(1.3.22) et les propriétés de parité des  $a_{Lj}(\lambda, z)$ , on peut améliorer ces estimations en utilisant le Théorème de Phragmén-Lindelöf (voir [DN11], Lemma 3.4.).

**Lemme 1.3.3.** Soit  $\lambda \in \mathbb{R}$  fixée. Alors, pour tout  $z \in \mathbb{C}$ ,

$$|a_{Lj}(\lambda, z)| \leq e^{A|\operatorname{Re}(z)|}, \quad j = 1, \dots, 4. \quad (1.3.24)$$

Il suit du Lemme 1.3.3 que les fonctions  $z \mapsto a_{Lj}(\lambda, z)$  appartiennent à la classe de Nevanlinna  $N(\Omega)$  sur le demi-plan de droite  $\Omega = \{z \in \mathbb{C}, \operatorname{Re}(z) > 0\}$ . On insiste sur le fait que cette propriété est un des points clés de la preuve du Théorème 1.1.1 donnée dans [DN11]. On rappelle ici la définition de cet ensemble de fonctions (voir par exemple

[Rud87]).

**Définition 1.3.1.** La classe de Nevanlinna  $N(\Omega)$  est définie comme étant l'ensemble des fonctions analytiques  $f(z)$  sur  $\Omega$  satisfaisant l'estimation

$$\sup_{0 < r < 1} \int_{-\pi}^{\pi} \ln^+ \left| f \left( \frac{1 - re^{i\varphi}}{1 + re^{i\varphi}} \right) \right| d\varphi < \infty,$$

où  $\ln^+(x) = \ln(x)$  si  $\ln(x) \geq 0$  et  $\ln^+(x) = 0$  si  $\ln(x) < 0$ .

On peut alors utiliser le résultat suivant, prouvé implicitement dans [Ram99], pour obtenir que les applications  $z \mapsto a_{Lj}(\lambda, z)$  appartiennent à la classe de Nevanlinna.

**Proposition 1.3.4.** Soit  $f \in H(\Omega)$  une fonction holomorphe sur  $\Omega$  satisfaisant

$$|f(z)| \leq Ce^{A \operatorname{Re}(z)}, \quad \forall z \in \Omega,$$

où  $A$  et  $C$  sont deux constantes. Alors  $f \in N(\Omega)$ .

De façon similaire, si l'on utilise les notations

$$F_L(x, \lambda, z) = \begin{pmatrix} f_{L1}(x, \lambda, z) & f_{L2}(x, \lambda, z) \\ f_{L3}(x, \lambda, z) & f_{L4}(x, \lambda, z) \end{pmatrix}$$

et

$$F_R(x, \lambda, z) = \begin{pmatrix} f_{R1}(x, \lambda, z) & f_{R2}(x, \lambda, z) \\ f_{R3}(x, \lambda, z) & f_{R4}(x, \lambda, z) \end{pmatrix},$$

on obtient les estimations correspondantes pour les solutions de Jost  $f_{Lj}(x, \lambda, z)$  et  $f_{Rj}(x, \lambda, z)$  pour  $j = 1, \dots, 4$ .

**Lemme 1.3.5.** Pour tout  $j = 1, \dots, 4$  et pour tout  $x \in \mathbb{R}$ ,

$$|f_{Lj}(x, \lambda, z)| \leq C e^{|\operatorname{Re}(z)| \int_x^\infty a(s) ds}, \quad (1.3.25)$$

$$|f_{Rj}(x, \lambda, z)| \leq C e^{|\operatorname{Re}(z)| \int_{-\infty}^x a(s) ds}. \quad (1.3.26)$$

Enfin, nous aurons besoin plus tard d'un développement asymptotique des données de diffusion lorsque le moment angulaire  $z \rightarrow +\infty$ ,  $z$  réel. Le point clé pour obtenir ces asymptotiques facilement consiste en un changement de variable  $X = g(x)$ , appelé transformation de Liouville, qui est précisé ici. Définissons

$$X = g(x) = \int_{-\infty}^x a(t) dt. \quad (1.3.27)$$

Clairement, puisque  $a$  est strictement positive et continue,  $g : \mathbb{R} \rightarrow ]0, A[$  est un  $C^1$ -difféomorphisme où

$$A = \int_{\mathbb{R}} a(t) dt. \quad (1.3.28)$$

Dans ce qui suit, on désigne par  $h = g^{-1}$  le difféomorphisme inverse de  $g$  et on utilise la notation  $f'(X) = \frac{\partial f}{\partial X}(X)$ . On définit également pour  $j = 1, \dots, 4$ , et pour  $X \in ]0, A[$ ,

$$f_j(X, \lambda, z) = f_{Lj}(h(X), \lambda, z), \quad (1.3.29)$$

$$g_j(X, \lambda, z) = f_{Rj}(h(X), \lambda, z). \quad (1.3.30)$$

On observe enfin que, dans la variable  $X$ , le Lemme 1.3.5 peut être écrit de la façon suivante : il existe une constante  $C > 0$  telle que

$$\forall z > 0, \quad |f_j(X, \lambda, z)| \leq C e^{z(A-X)} \quad \text{et} \quad |g_j(X, \lambda, z)| \leq C e^{zX}. \quad (1.3.31)$$

L'intérêt d'introduire la variable  $X$  réside dans le fait que les composantes  $f_j(X, \lambda, z)$  et  $g_j(X, \lambda, z)$  des solutions de Jost satisfont des équations différentielles de Sturm-Liouville singulières en cette variable. Dans ces équations le moment angulaire complexe  $z$  joue le rôle de paramètre spectral. Précisément, on peut démontrer le Lemme suivant.

**Lemme 1.3.6.** *Pour  $j = 1, 2$ ,  $f_j(X, \lambda, z)$  et  $g_j(X, \lambda, z)$  satisfont sur  $]0, A[$  l'équation de Sturm-Liouville*

$$y'' + q(X)y = z^2 y, \quad (1.3.32)$$

*alors que, pour  $j = 3, 4$ ,  $f_j(X, \lambda, z)$  et  $g_j(X, \lambda, z)$  satisfont sur  $]0, A[$  l'équation de Sturm-Liouville*

$$y'' + \overline{q(X)}y = z^2 y, \quad (1.3.33)$$

*où le potentiel*

$$q(X) = \lambda^2 h'(X)^2 - i\lambda h''(X) = \frac{\lambda^2}{a^2(x)} + i\lambda \frac{a'(x)}{a^3(x)},$$

*possède les asymptotiques*

$$q(X) - \frac{\omega_-}{X^2} = O(1), \quad X \rightarrow 0, \quad \text{où} \quad \omega_- = \frac{\lambda^2}{\kappa_-^2} + i \frac{\lambda}{\kappa_-}, \quad (1.3.34)$$

$$q(X) - \frac{\omega_+}{(A-X)^2} = O(1), \quad X \rightarrow A, \quad \text{où} \quad \omega_+ = \frac{\lambda^2}{\kappa_+^2} + i \frac{\lambda}{\kappa_+}. \quad (1.3.35)$$

Le Lemme 1.3.6 suggère que les solutions de Jost  $f_j$  et  $g_j$  peuvent être construite comme

des perturbations de fonctions de Bessel modifiées  $I_\nu(z(A - X))$  et  $I_\mu(zX)$  pour  $\mu$  et  $\nu$  bien choisis. Ceci est fait en détails dans [DN11]. En utilisant cette construction ainsi que le développement asymptotique bien connu des fonctions de Bessel modifiées, les asymptotiques pour  $z$  grand des données de diffusion  $a_{Lj}(\lambda, z)$  ont été calculées dans [DN11]. Plus précisément, on obtient les asymptotiques suivantes.

**Théoreme 1.3.7.** *On pose*

$$\nu_+ = \frac{1}{2} - i\frac{\lambda}{\kappa_+} \quad \text{et} \quad \mu_- = \frac{1}{2} + i\frac{\lambda}{\kappa_-}. \quad (1.3.36)$$

1. Pour  $X \in ]0, A[$  fixé et  $z \in S_\theta$  où  $S_\theta = \{z \in \mathbb{C}, |\arg(z)| \leq \theta\}$  pour un  $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$  donné, les solutions de Jost  $f_1(X, \lambda, z)$  et  $g_2(X, \lambda, z)$  vérifient

$$\begin{aligned} f_1(X, \lambda, z) &= \frac{2^{-\nu_+}}{\sqrt{2\pi}} \left(-\frac{\kappa_+}{a_+}\right)^{\frac{i\lambda}{\kappa_+}} \Gamma(1 - \nu_+) z^{-\frac{i\lambda}{\kappa_+}} \\ &\quad \times e^{z(A-X)} \left(1 + O\left(\frac{1}{z}\right)\right), \end{aligned} \quad (1.3.37)$$

$$\begin{aligned} g_2(X, \lambda, z) &= i \frac{2^{-\mu_-}}{\sqrt{2\pi}} \left(\frac{\kappa_-}{a_-}\right)^{-\frac{i\lambda}{\kappa_-}} \Gamma(1 - \mu_-) z^{\frac{i\lambda}{\kappa_-}} \\ &\quad \times e^{zX} \left(1 + O\left(\frac{1}{z}\right)\right). \end{aligned} \quad (1.3.38)$$

2. Pour les données de diffusion  $a_{L1}(\lambda, z)$  et  $a_{L3}(\lambda, z)$ , on a

$$\begin{aligned} a_{L1}(\lambda, z) &= \frac{1}{2\pi} \left(-\frac{\kappa_+}{a_+}\right)^{\frac{i\lambda}{\kappa_+}} \left(\frac{\kappa_-}{a_-}\right)^{-\frac{i\lambda}{\kappa_-}} \Gamma\left(\frac{1}{2} - \frac{i\lambda}{\kappa_-}\right) \Gamma\left(\frac{1}{2} + \frac{i\lambda}{\kappa_+}\right) \\ &\quad \times \left(\frac{z}{2}\right)^{i\lambda\left(\frac{1}{\kappa_-} - \frac{1}{\kappa_+}\right)} e^{zA} \left(1 + O\left(\frac{1}{z}\right)\right), \end{aligned} \quad (1.3.39)$$

$$\begin{aligned} a_{L3}(\lambda, z) &= \frac{i}{2\pi} \left(-\frac{\kappa_+}{a_+}\right)^{\frac{i\lambda}{\kappa_+}} \left(\frac{\kappa_-}{a_-}\right)^{\frac{i\lambda}{\kappa_-}} \Gamma\left(\frac{1}{2} + \frac{i\lambda}{\kappa_-}\right) \Gamma\left(\frac{1}{2} + \frac{i\lambda}{\kappa_+}\right) \\ &\quad \times \left(\frac{z}{2}\right)^{-i\lambda\left(\frac{1}{\kappa_+} + \frac{1}{\kappa_-}\right)} e^{zA} \left(1 + O\left(\frac{1}{z}\right)\right). \end{aligned}$$

3. Pour les coefficients de diffusion  $T(\lambda, z)$  et  $L(\lambda, z)$ , on a

$$T(\lambda, z) = 2\pi \frac{\left(-\frac{a_+}{\kappa_+}\right)^{\frac{i\lambda}{\kappa_+}} \left(\frac{a_-}{\kappa_-}\right)^{-\frac{i\lambda}{\kappa_-}}}{\Gamma\left(\frac{1}{2} - \frac{i\lambda}{\kappa_-}\right) \Gamma\left(\frac{1}{2} + \frac{i\lambda}{\kappa_+}\right)} \left(\frac{z}{2}\right)^{i\lambda\left(\frac{1}{\kappa_+} - \frac{1}{\kappa_-}\right)} e^{-zA} \left(1 + O\left(\frac{1}{z}\right)\right),$$

$$L(\lambda, z) = i \left(\frac{\kappa_-}{a_-}\right)^{\frac{2i\lambda}{\kappa_-}} \frac{\Gamma\left(\frac{1}{2} + \frac{i\lambda}{\kappa_-}\right)}{\Gamma\left(\frac{1}{2} - \frac{i\lambda}{\kappa_-}\right)} \left(\frac{z}{2}\right)^{-\frac{2i\lambda}{\kappa_-}} \left(1 + O\left(\frac{1}{z}\right)\right). \quad (1.3.40)$$

Nous allons préciser dans le Lemme 1.7.3 l'asymptotique (1.3.39) sur tout le plan complexe  $\mathbb{C}$  en utilisant les résultats obtenus par Freiling et Yurko dans [FY05]. En effet, notre Équation (1.3.32) entre exactement dans le cadre de leur travail dans lequel une fonction de Weyl-Titchmarsh généralisée est construite pour de telles équations singulières. Nous rappelons ici brièvement quelques fait basiques à ce propos et pour simplifier la lecture nous commençons par établir un dictionnaire entre les notations de [FY05] et notre cadre. Dans [FY05], Equation (2.1), Freiling et Yurko considèrent l'équation différentielle suivante :

$$-y''(x) + Q(x)y(x) = \lambda y(x), \quad x \in (0, T), \quad (1.3.41)$$

où le potentiel  $Q(x)$  possède des singularités quadratiques aux bouts de l'intervalle :

$$Q(x) \sim \frac{\omega_0}{x^2}, \quad x \rightarrow 0 \quad \text{et} \quad Q(x) \sim \frac{\omega_1}{(T-x)^2}, \quad x \rightarrow T. \quad (1.3.42)$$

On remarque alors que l'Équation (1.3.32) entre exactement dans ce cadre où  $\lambda$  dans (1.3.41) doit être remplacé par  $-z^2$ ,  $x \in (0, T)$  par  $X \in (0, A)$  et  $Q(x)$  par  $-q(X)$ . On en déduit alors que  $\omega_0 = -\omega_-$  et  $\omega_1 = \omega_+$ . Ainsi, les paramètres  $\mu_{jm}$  qui apparaissent dans [FY05] sont donnés dans notre cadre par :

$$\mu_{10} = \frac{i\lambda}{\kappa_-}, \quad \mu_{20} = 1 - \frac{i\lambda}{\kappa_-}, \quad \mu_{11} = \frac{i\lambda}{\kappa_+}, \quad \mu_{21} = 1 - \frac{i\lambda}{\kappa_+}, \quad (1.3.43)$$

et les fonctions  $S_{jm}$  définies dans [FY05] sont ici données par :

$$\begin{aligned} S_{10} &= g_1(X, \lambda, z), & S_{20} &= \frac{1}{iz} g_2(X, \lambda, z), \\ S_{11} &= f_1(X, \lambda, z), & S_{21} &= \frac{1}{iz} f_2(X, \lambda, z). \end{aligned} \quad (1.3.44)$$

En utilisant ([DN11], Lemma 4.2), on voit que la paire  $(S_{10}, S_{20})$ , (respectivement la

paire  $(S_{11}, S_{21})$ , forme un système fondamental de solutions de l'Équation (1.3.32). Leur Wronskien vérifient  $W(S_{10}, S_{20}) = 1$  et  $W(S_{11}, S_{21}) = 1$ . En suivant [FY05], Eqs (3.2)-(3.3) avec  $a_1 = a_2 = 0$ , la première fonction caractéristique  $\Delta(\lambda, z)$  est alors définie par

$$\Delta(\lambda, z) = W(S_{11}, S_{10}) = W(f_1, g_1) = -iz a_{L3}(\lambda, z), \quad (1.3.45)$$

où on a utilisé [DN11], page 39, pour obtenir la dernière égalité. De même, l'autre fonction caractéristique  $d(\lambda, z)$ , (voir [FY05], pages 1564-1566) est définie par :

$$d(\lambda, z) = W(S_{11}, S_{20}) = \frac{1}{iz} W(f_1, g_2) = a_{L1}(\lambda, z). \quad (1.3.46)$$

Finalement la fonction de WT généralisée est définie par

$$M(\lambda, z) = -\frac{d(\lambda, z)}{\Delta(\lambda, z)} = \frac{1}{iz} \frac{1}{L(\lambda, z)}. \quad (1.3.47)$$

En conclusion, la connaissance du coefficient de réflexion  $L$  (respectivement du coefficient de transmission  $T$ ) dans notre cadre est équivalente à la connaissance de la fonction de Weyl-Titchmarsh (respectivement de la fonction caractéristique) dans le cadre de [FY05].

## 1.4 Preuves des résultats principaux

### 1.4.1 Preuve du Théorème 1.1.3, (i) $\Rightarrow$ (ii).

On suppose que

$$L(\lambda, n) = \tilde{L}(\lambda, n) + O\left(e^{-2nB}\right), \quad n \rightarrow +\infty.$$

La première étape consiste à étendre ces asymptotiques (valides pour  $n$  entier tendant vers  $+\infty$ ) aux  $z \rightarrow +\infty$  ( $z$  réel et positif). Pour ce faire nous allons utiliser des résultats d'unicité bien connus sur la transformée de Laplace donnés dans [Hor11, Sim99].

On commence par rappeler un résultat élémentaire pour des fonctions de la variable complexe appartenant à la classe de Hardy. Pour rappel (voir par exemple [Lev96], Lecture 19) la classe de Hardy  $H_+^2$  est l'ensemble des fonctions analytiques  $F$  sur le demi-plan de droite  $\Omega = \{z \in \mathbb{C}, \operatorname{Re}(z) > 0\}$ , satisfaisant la condition

$$\sup_{x>0} \int_{\mathbb{R}} |F(x+iy)|^2 dy < \infty, \quad (1.4.1)$$



et équipé de la norme

$$\|F\| = \left( \sup_{x>0} \int_{\mathbb{R}} |F(x+iy)|^2 dy \right)^{\frac{1}{2}}. \quad (1.4.2)$$

Le Théorème de Paley-Wiener affirme qu'une fonction  $F$  appartient à l'espace de Hardy  $H_+^2$  si et seulement si il existe une fonction  $f \in L^2(0, +\infty)$  telle que

$$F(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{+\infty} e^{-tz} f(t) dt, \quad \forall z \in \Omega. \quad (1.4.3)$$

De plus, on a

$$\|F\| = \|f\|_{L^2(0, \infty)}. \quad (1.4.4)$$

On rappelle également un résultat d'unicité pour la transformée de Laplace donné dans [Hor11], Prop. 2.4. (voir aussi [Sim99] pour une version continue) :

**Proposition 1.4.1.** *Soit  $f \in L^1(0, a)$ . Si pour tout  $\epsilon > 0$ ,*

$$\int_0^a e^{-nt} f(t) dt = O(e^{-an(1-\epsilon)}), \quad n \rightarrow +\infty,$$

*alors  $f = 0$  p.p.*

On utilise alors les résultats précédents pour démontrer la Proposition suivante.

**Proposition 1.4.2.** *Soit  $F$  une fonction dans la classe de Hardy  $H_+^2$ . Supposons que pour un certain  $B > 0$ , on ait  $F(n) = O(e^{-Bn})$ ,  $n \rightarrow +\infty$ , ( $n$  entier). Alors,*

$$|F(z)| \leq \frac{\|F\|}{\sqrt{4\pi \operatorname{Re}(z)}} e^{-B \operatorname{Re}(z)}, \quad \forall z \in \Omega. \quad (1.4.5)$$

*Démonstration.* D'après le Théorème de Paley-Wiener, il existe une fonction  $f$  appartenant à  $L^2(0, +\infty)$  telle que

$$F(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{+\infty} e^{-tz} f(t) dt, \quad \forall z \in \Omega.$$

Étant donné  $n \in \mathbb{N}$ , on a donc

$$\int_0^B e^{-nt} f(t) dt = \sqrt{2\pi} F(n) - \int_B^{+\infty} e^{-nt} f(t) dt.$$

De plus, d'après l'inégalité de Cauchy-Schwarz,

$$\begin{aligned} \int_B^{+\infty} e^{-nt} f(t) dt &\leq \left( \int_B^{+\infty} e^{-2nt} dt \right)^{\frac{1}{2}} \|f\|_{L^2(0,+\infty)} \\ &= \left( \frac{e^{-2nB}}{2n} \right)^{\frac{1}{2}} \|f\|_{L^2(0,+\infty)} \\ &= e^{-nB} \frac{1}{\sqrt{2n}} \|f\|_{L^2(0,+\infty)}. \end{aligned}$$

On a donc obtenu que

$$\int_B^{+\infty} e^{-nt} f(t) dt = O\left(e^{-nB}\right).$$

Finalement, en utilisant notre hypothèse on obtient,

$$\begin{aligned} \int_0^B e^{-nt} f(t) dt &= \sqrt{2\pi} F(n) - \int_B^{+\infty} e^{-nt} f(t) dt \\ &= \sqrt{2\pi} F(n) + O\left(e^{-nB}\right) = O\left(e^{-nB}\right) \end{aligned}$$

et a fortiori, pour tout  $\epsilon > 0$ , on a

$$\int_0^B e^{-nt} f(t) dt = O\left(e^{-nB(1-\epsilon)}\right).$$

Ainsi d'après la Proposition 1.4.1,  $f = 0$  presque partout que  $(0, B)$ . En utilisant à nouveau (1.4.3), l'inégalité de Cauchy-Schwarz puis (1.4.4) on obtient pour tout  $z \in \Omega$ ,

$$\begin{aligned} |F(z)| &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left| \int_B^{+\infty} e^{-tz} f(t) dt \right| \\ &\leq \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_B^{+\infty} e^{-t\operatorname{Re}(z)} |f(t)| dt \\ &\leq \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left( \int_B^{+\infty} e^{-2t\operatorname{Re}(z)} dt \right)^{\frac{1}{2}} \|f\|_{L^2(0,+\infty)} \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left( \frac{e^{-2B\operatorname{Re}(z)}}{2\operatorname{Re}(z)} \right)^{\frac{1}{2}} \underbrace{\|f\|_{L^2(0,+\infty)}}_{=\|F\|} \\ &= \frac{1}{\sqrt{4\pi\operatorname{Re}(z)}} e^{-B\operatorname{Re}(z)} \|F\| \end{aligned}$$

qui est bien l'inégalité (1.4.5) recherchée. □

On énonce à présent une conséquence immédiate (pouvant certainement être améliorée)

du résultat précédent qui nous permet de passer du régime discret au régime continue. Plus précisément, ce résultat nous permet de passer des asymptotiques pour  $n$  entier tendant vers  $+\infty$  aux asymptotiques pour  $z$  réel tendant vers  $+\infty$ .

**Proposition 1.4.3.** *Supposons que les coefficients de réflexion  $L(\lambda, n)$  et  $\tilde{L}(\lambda, n)$  satisfont pour un certain  $0 < B < \min(A, \tilde{A})$ ,*

$$L(\lambda, n) = \tilde{L}(\lambda, n) + O\left(e^{-2nB}\right), \quad n \rightarrow +\infty, \quad n \text{ entier.}$$

Alors

$$L(\lambda, z) = \tilde{L}(\lambda, z) + O\left(\sqrt{z}e^{-2zB}\right), \quad z \rightarrow +\infty, \quad z \text{ réel.} \quad (1.4.6)$$

*Démonstration.* Pour commencer rappelons que

$$L(\lambda, n) = \frac{a_{L3}(\lambda, n)}{a_{L1}(\lambda, n)} \quad \text{et} \quad \tilde{L}(\lambda, n) = \frac{\tilde{a}_{L3}(\lambda, n)}{\tilde{a}_{L1}(\lambda, n)}. \quad (1.4.7)$$

En utilisant le premier point du Lemme 1.3.2, on obtient, par hypothèse, que si l'on pose

$$G(n) = |a_{L3}(\lambda, n)\tilde{a}_{L1}(\lambda, n) - \tilde{a}_{L3}(\lambda, n)a_{L1}(\lambda, n)|,$$

alors il existe une constante  $C$  telle que

$$\begin{aligned} G(n) &= |a_{L1}(\lambda, n)\tilde{a}_{L1}(\lambda, n)| \left| \frac{a_{L3}(\lambda, n)}{a_{L1}(\lambda, n)} - \frac{\tilde{a}_{L3}(\lambda, n)}{\tilde{a}_{L1}(\lambda, n)} \right| \\ &\leq C|a_{L1}(\lambda, n)\tilde{a}_{L1}(\lambda, n)|e^{-2nB} \\ &\leq Ce^{nA}e^{n\tilde{A}}e^{-2nB} \\ &= Ce^{n(A+\tilde{A}-2B)}. \end{aligned}$$

Autrement dit,

$$a_{L3}(\lambda, n)\tilde{a}_{L1}(\lambda, n) - \tilde{a}_{L3}(\lambda, n)a_{L1}(\lambda, n) = O\left(e^{n(A+\tilde{A}-2B)}\right). \quad (1.4.8)$$

Pour  $z \in \Omega$ , on pose

$$F(z) = \frac{a_{L3}(\lambda, z)\tilde{a}_{L1}(\lambda, z) - \tilde{a}_{L3}(\lambda, z)a_{L1}(\lambda, z)}{z+1} e^{-z(A+\tilde{A})}. \quad (1.4.9)$$

La fonction  $F$  est alors holomorphe sur  $\Omega$  d'après le Lemme 1.3.2 et, d'après le Lemme 1.3.3, on a

$$|F(z)| \leq \frac{2}{|z+1|}. \quad (1.4.10)$$

Ainsi, pour tout  $x > 0$ ,

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}} |F(x + iy)|^2 dy &\leq \int_{\mathbb{R}} \frac{4}{|(x+1) + iy|^2} dy \\ &= \int_{\mathbb{R}} \frac{4}{(x+1)^2 + y^2} dy \\ &\leq \int_{\mathbb{R}} \frac{4}{1 + y^2} dy < \infty. \end{aligned}$$

On en déduit que  $F \in H_+^2$  et de plus, d'après l'estimation (1.4.8), il existe une constante  $C$  telle que

$$|F(n)| \leq C \frac{e^{n(A+\tilde{A}-2B)}}{n+1} e^{-n(A+\tilde{A})} \leq C e^{-2nB},$$

c'est-à-dire que  $F(n) = O(e^{-2nB})$ .

Ainsi, en utilisant à présent la Proposition 1.4.2, on obtient que

$$F(z) = O\left(z^{-\frac{1}{2}} e^{-2zB}\right), \quad z \rightarrow +\infty.$$

Finalement, pour  $z > 0$ , on remarque que

$$L(\lambda, z) - \tilde{L}(\lambda, z) = \frac{(z+1)e^{z(A+\tilde{A})}}{a_{L1}(\lambda, z)\tilde{a}_{L1}(\lambda, z)} F(z) \quad (1.4.11)$$

et l'on conclut en utilisant l'asymptotique (1.3.39).  $\square$

Ceci conclut la première étape de notre preuve du Théorème 1.1.3, (i)  $\Rightarrow$  (ii). La seconde étape consiste en une adaptation de la stratégie utilisée pour prouver le Théorème de Borg-Marchenko local dans [Sim99, Ben01] pour les opérateurs de Schrödinger unidimensionnels à notre cadre d'opérateurs de Dirac sur une VAHSS. Cette stratégie est relativement proche de celle utilisée dans [DN11] pour prouver le Théorème 1.1, elle-même inspirée par [FY05]. On introduit pour  $X \in ]0, B[$  la matrice

$$P(X, \lambda, z) = \begin{pmatrix} P_1(X, \lambda, z) & P_2(X, \lambda, z) \\ P_3(X, \lambda, z) & P_4(X, \lambda, z) \end{pmatrix},$$

définie par

$$P(X, \lambda, z) \tilde{F}_R(\tilde{h}(X), \lambda, z) = F_R(h(X), \lambda, z), \quad (1.4.12)$$

où  $F_R = (f_{Rk})$  et  $\tilde{F}_R = (\tilde{f}_{Rk})$  sont les solutions de Jost à droite associées respectivement à  $a(x)$  et  $\tilde{a}(x)$ .

Notre but est à présent de montrer que les applications  $z \mapsto P_j(X, \lambda, z)$ ,  $j \in \{1, 2, 3, 4\}$ , sont constantes sur le plan complexe. Pour simplifier les notations, pour  $k = 1, \dots, 4$ , on pose comme précédemment :

$$\begin{aligned} f_k(X, \lambda, z) &= f_{Lk}(h(X), \lambda, z), & \tilde{f}_k(X, \lambda, z) &= \tilde{f}_{Lk}(\tilde{h}(X), \lambda, z), \\ g_k(X, \lambda, z) &= f_{Rk}(h(X), \lambda, z), & \tilde{g}_k(X, \lambda, z) &= \tilde{f}_{Rk}(\tilde{h}(X), \lambda, z). \end{aligned}$$

En utilisant le fait que  $\det(F_R) = 1$  et  $\det(\tilde{F}_R) = 1$ , on obtient les égalités suivantes (pour alléger les notations on omet volontairement le nom des variables) :

$$\begin{cases} P_1(X, \lambda, z) &= g_1 \tilde{g}_4 - g_2 \tilde{g}_3, \\ P_2(X, \lambda, z) &= -g_1 \tilde{g}_2 + g_2 \tilde{g}_1. \end{cases} \quad (1.4.13)$$

De (1.4.13) et des propriétés d'analyticité des fonctions de Jost, on déduit que, pour  $j = 1, 2$ , les applications  $z \mapsto P_j(X, \lambda, z)$  sont analytiques sur  $\mathbb{C}$  et de type exponentiel d'après le Lemme 1.3.5. De plus, toujours d'après le Lemme 1.3.5, ces applications sont bornées sur l'axe imaginaire pur  $i\mathbb{R}$ .

L'objectif est maintenant de montrer que, pour  $j = 1, \dots, 4$ , les applications  $z \mapsto P_j(X, \lambda, z)$  sont également bornées sur l'axe réel. Notons que, par symétrie, il est suffisant de montrer que les applications  $z \mapsto P_j(X, \lambda, z)$  sont bornées pour  $j = 1$  et  $j = 2$ . Pour ce faire, nous allons commencer par procéder à des transformations algébriques élémentaires sur  $P_j(X, \lambda, z)$ . Puisque

$$F_L(x, \lambda, z) = F_R(x, \lambda, z)A_L(\lambda, z)$$

et

$$\tilde{F}_L(x, \lambda, z) = \tilde{F}_R(x, \lambda, z)\tilde{A}_L(\lambda, z),$$

on a pour  $z > 0$  :

$$\begin{aligned} f_1 &= g_1 a_{L1} + g_2 a_{L3}, \\ \tilde{f}_3 &= \tilde{g}_3 \tilde{a}_{L1} - \tilde{g}_4 \tilde{a}_{L3}. \end{aligned}$$

On obtient alors facilement pour  $z > 0$  :

$$\begin{aligned} g_1 &= \frac{f_1}{a_{L1}} - L(\lambda, z)g_2, \\ \tilde{g}_3 &= \frac{\tilde{f}_3}{\tilde{a}_{L1}} - \tilde{L}(\lambda, z)\tilde{g}_4. \end{aligned}$$

Ainsi,

$$\begin{aligned}
 P_1(X, \lambda, z) &= g_1 \tilde{g}_4 - g_2 \tilde{g}_3 \\
 &= \left( \frac{f_1}{a_{L1}} - L(\lambda, z) g_2 \right) \tilde{g}_4 - g_2 \left( \frac{\tilde{f}_3}{\tilde{a}_{L1}} - \tilde{L}(\lambda, z) \tilde{g}_4 \right) \\
 &= (\tilde{L}(\lambda, z) - L(\lambda, z)) g_2 \tilde{g}_4 + \left( \frac{f_1 \tilde{g}_4}{a_{L1}} - \frac{\tilde{f}_3 g_2}{\tilde{a}_{L1}} \right).
 \end{aligned}$$

On sait, d'après le Lemme 1.3.5, que, pour  $j = 1, \dots, 4$ , il existe une constante réelle  $C$  tel que pour tout  $z$  réel strictement positif

$$\begin{cases} |f_j(X, \lambda, z)| \leq C e^{z(A-X)}, \\ |\tilde{f}_j(X, \lambda, z)| \leq C e^{z(\tilde{A}-X)}, \\ |g_j(X, \lambda, z)| \leq C e^{zX}, \\ |\tilde{g}_j(X, \lambda, z)| \leq C e^{zX}. \end{cases}$$

De plus, d'après le Théorème 1.3.7, si  $z$  est réel assez grand il existe également une constante  $C$  telle que

$$|a_{L4}(\lambda, z)| \geq C e^{Az}$$

ainsi qu'une constante  $\tilde{C}$  telle que

$$|\tilde{a}_{L4}(\lambda, z)| \geq \tilde{C} e^{\tilde{A}z}.$$

De ceci l'on déduit que les applications

$$z \mapsto \frac{f_1 \tilde{g}_4}{a_{L1}} \quad \text{et} \quad z \mapsto \frac{\tilde{f}_3 g_2}{\tilde{a}_{L1}},$$

sont bornées sur  $\mathbb{R}^+$  et ceci pour tout  $X \in ]0, B[$  fixé. De plus, d'après le Lemme 1.3.5, l'hypothèse et la Proposition 1.4.3, il existe une constante  $C$  telle que l'on a

$$|(\tilde{L}(\lambda, z) - L(\lambda, z)) g_2(X, \lambda, z) \tilde{g}_4(X, \lambda, z)| \leq C \sqrt{z} e^{-2z(B-X)}. \quad (1.4.14)$$

Ainsi, ce terme est borné lorsque  $z \rightarrow +\infty$  pour tout  $X \in ]0, B[$ . Finalement on a montré que, pour tout  $X \in ]0, B[$  fixé, l'application  $z \mapsto P_1(X, \lambda, z)$  est bornée sur  $\mathbb{R}^+$ .

De même, on a

$$P_2(X, \lambda, z) = (L(\lambda, z) - \tilde{L}(\lambda, z)) g_2 \tilde{g}_2 + \left( \frac{\tilde{f}_1 g_2}{\tilde{a}_{L1}} - \frac{f_1 \tilde{g}_2}{a_{L1}} \right), \quad (1.4.15)$$

et en utilisant les mêmes arguments que précédemment, on obtient que pour tout  $X \in ]0, B[$  fixé,  $z \mapsto P_2(X, \lambda, z)$  est bornée sur  $\mathbb{R}^+$ .

Nous allons à présent conclure en suivant le raisonnement de [DN11]. Tout d'abord par parité/imparité on obtient que, pour  $j = 1, \dots, 4$ , les applications  $z \mapsto P_j(X, \lambda, z)$  sont bornées sur  $\mathbb{R}$  pour tout  $X \in ]0, B[$ . En rappelant que ces applications sont également bornées sur l'axe imaginaire pur  $i\mathbb{R}$  et qu'elles sont de type exponentiel, nous pouvons appliquer le Théorème de Phragmén-Lindelöf (voir [Boa54], Thm 1.4.2.) sur chaque cadran du plan complexe. Ceci nous permet de conclure que, pour  $j = 1, \dots, 4$ , les applications  $z \mapsto P_j(X, \lambda, z)$  sont bornées sur chacun de ces cadrans et donc sur  $\mathbb{C}$  pour tout  $X \in ]0, B[$ . Ainsi, d'après le Théorème de Liouville et grâce à un argument de continuité en la variable  $X$ , on obtient que

$$P_j(X, \lambda, z) = P_j(X, \lambda, 0), \quad \forall z \in \mathbb{C}, \quad \forall X \in ]0, B]. \quad (1.4.16)$$

Revenons à présent à la définition de  $P(X, \lambda, z)$  pour  $z = 0$ . On commence par remarquer, par définition des fonctions de Jost, que  $F_R(x, \lambda, 0) = e^{i\lambda\Gamma^1 x}$  et de même que  $\tilde{F}_R(x, \lambda, 0) = e^{i\lambda\Gamma^1 x}$ . Ainsi, on déduit de (1.4.12) que, pour tout  $X \in ]0, B]$ ,

$$P(X, \lambda, 0) = e^{i\lambda(h(X) - \tilde{h}(X))\Gamma^1}. \quad (1.4.17)$$

Ainsi, en injectant (1.4.16) et (1.4.17) dans (1.4.12) on obtient pour tout  $X \in ]0, B]$  :

$$\begin{cases} \tilde{g}_1(X, \lambda, z) &= e^{i\lambda(\tilde{h}(X) - h(X))} g_1(X, \lambda, z), \\ \tilde{g}_2(X, \lambda, z) &= e^{i\lambda(\tilde{h}(X) - h(X))} g_2(X, \lambda, z). \end{cases} \quad (1.4.18)$$

D'après le Lemme 4.2 de [DN11],  $W(g_1, g_2) = W(\tilde{g}_1, \tilde{g}_2) = iz$ . Ainsi, un calcul simple donne :

$$e^{2i\lambda(\tilde{h}(X) - h(X))} = 1. \quad (1.4.19)$$

Donc, par un argument standard de continuité et connexité, on obtient qu'il existe  $k \in \mathbb{Z}$  tel que

$$\tilde{h}(X) = h(X) + \frac{k\pi}{\lambda}, \quad \forall X \in ]0, B]. \quad (1.4.20)$$

Notons que, dans le cas particulier  $X = B$ , on obtient  $\tilde{h}(B) = h(B) + \frac{k\pi}{\lambda}$ . En dérivant

(1.4.20) par rapport à  $X$ , on obtient

$$\frac{1}{\tilde{a}(\tilde{h}(X))} = \frac{1}{a(h(X))}, \quad \forall X \in ]0, B], \quad (1.4.21)$$

et, en utilisant à nouveau (1.4.20), on obtient l'existence de  $k \in \mathbb{Z}$  tel que

$$a(x) = \tilde{a}\left(x + \frac{k\pi}{\lambda}\right), \quad \forall x \in ]-\infty, h(B)]. \quad (1.4.22)$$

Ceci achève de démontrer l'implication (i)  $\Rightarrow$  (ii) du Théorème 1.1.3.  $\square$

#### 1.4.2 Preuve du Théorème 1.1.3, (ii) $\Rightarrow$ (i).

Supposons qu'il existe  $k \in \mathbb{Z}$  tel que  $a(x) = \tilde{a}\left(x + \frac{k\pi}{\lambda}\right)$ ,  $\forall x \leq h(B)$ . Il découle alors immédiatement de la définition des difféomorphismes  $h$  et  $\tilde{h}$ , que  $\tilde{h}(B) = h(B) + \frac{k\pi}{\lambda}$ . De plus, si l'on pose  $\check{a}(x) = \tilde{a}\left(x + \frac{k\pi}{\lambda}\right)$ ,  $\forall x \in \mathbb{R}$ , en utilisant (1.3.15), on voit que,

$$\check{L}(\lambda, n) = e^{-2i\lambda \frac{k\pi}{\lambda}} \tilde{L}(\lambda, n) = \tilde{L}(\lambda, n). \quad (1.4.23)$$

Ainsi, il suffit de prouver l'implication (ii)  $\Rightarrow$  (i) dans le cas  $k = 0$ . Commençons par un Lemme évident.

**Lemme 1.4.4.** *Supposons que  $a(x) = \tilde{a}(x)$ ,  $\forall x \leq h(B) = \tilde{h}(B)$ . Alors*

$$a_- = \tilde{a}_- \quad \text{et} \quad \kappa_- = \tilde{\kappa}_- \quad (1.4.24)$$

et

$$g_j(X, \lambda, z) = \tilde{g}_j(X, \lambda, z), \quad \forall X \leq B, \quad \forall j = 1, \dots, 4. \quad (1.4.25)$$

*Démonstration.* 1. Ce résultat est immédiat d'après l'égalité (1.1.2).

2. On utilise, en plus de l'hypothèse, l'unicité de la solution de l'équation différentielle (1.3.5) vérifiant les asymptotiques fournies par les fonctions de Jost.

$\square$

Étant donné que

$$F_L(x, \lambda, n) = F_R(x, \lambda, n)A_L(\lambda, n),$$

on a en particulier

$$f_1(X, \lambda, z) = a_{L1}(\lambda, z)g_1(X, \lambda, z) + a_{L3}(\lambda, z)g_2(X, \lambda, z)$$



et ainsi par définition de  $L(\lambda, z) = \frac{a_{L3}(\lambda, z)}{a_{L1}(\lambda, z)}$ ,

$$\frac{f_1(X, \lambda, z)}{a_{L1}(\lambda, z)} = g_1(X, \lambda, z) + L(\lambda, z)g_2(X, \lambda, z). \quad (1.4.26)$$

De même, en utilisant le (1.4.25), on obtient pour tout  $X \in ]0, B]$ ,

$$\frac{\tilde{f}_1(X, \lambda, z)}{\tilde{a}_{L1}(\lambda, z)} = g_1(X, \lambda, z) + \tilde{L}(\lambda, z)g_2(X, \lambda, z). \quad (1.4.27)$$

D'après l'asymptotique (1.3.38), pour  $z > 0$  assez grand,  $g_2(X, \lambda, z) \neq 0$ . Ainsi, pour de tels  $z$  et pour  $X \in ]0, B]$ , on obtient

$$L(\lambda, z) - \tilde{L}(\lambda, z) = \frac{1}{g_2} \left( \frac{f_1}{a_{L1}} - \frac{\tilde{f}_1}{\tilde{a}_{L1}} \right).$$

À présent, en utilisant le Théorème 1.3.7, on obtient facilement l'existence d'une constante  $C$  telle que :

$$|L(\lambda, z) - \tilde{L}(\lambda, z)| \leq C e^{-zX} \left( \frac{e^{z(A-X)}}{e^{zA}} + \frac{e^{z(\tilde{A}-X)}}{e^{z\tilde{A}}} \right) = 2C e^{-2zX}.$$

On a donc montré que

$$L(\lambda, z) - \tilde{L}(\lambda, z) = O\left(e^{-2zX}\right), \quad \forall X \in ]0, B].$$

On achève alors la preuve en prenant  $X = B$ . □

### 1.4.3 Preuve du Théorème 1.1.3, (iii) $\Leftrightarrow$ (iv).

Le résultat d'unicité locale pour le coefficient de réflexion  $R(\lambda, n)$  est une conséquence du résultat obtenu pour le coefficient de réflexion  $L(\lambda, n)$  après avoir effectué le bon changement de potentiel. Étant donné un potentiel  $a$ , on considère le potentiel défini pour tout  $x \in \mathbb{R}$  par  $a^*(x) = a(-x)$ . En utilisant les équations intégrales (1.3.4) et (1.3.5) et les asymptotiques prescrites à l'infini des fonctions de Jost on obtient :

$$\begin{cases} F_R^*(x, \lambda, n) &= F_L(-x, -\lambda, -n), \\ F_L^*(x, \lambda, n) &= F_R(-x, -\lambda, -n). \end{cases} \quad (1.4.28)$$

Or, nous savons que  $F_L(x, \lambda, n) = F_R(x, \lambda, n)A_L(\lambda, n)$  et de même que  $F_L^*(x, \lambda, n) = F_R^*(x, \lambda, n)A_L^*(\lambda, n)$ , donc en utilisant (1.4.28) on a

$$\begin{aligned} F_R^*(x, \lambda, n)A_L^*(\lambda, n) &= F_L^*(x, \lambda, n) \\ &= F_R(-x, -\lambda, -n) \\ &= F_L(-x, -\lambda, -n)A_L^{-1}(-\lambda, -n) \\ &= F_R^*(x, \lambda, n)A_L^{-1}(-\lambda, -n). \end{aligned}$$

Ainsi,  $A_L^*(\lambda, n) = A_L^{-1}(-\lambda, -n)$ , c'est-à-dire

$$\begin{pmatrix} a_{L1}^*(\lambda, n) & a_{L2}^*(\lambda, n) \\ a_{L3}^*(\lambda, n) & a_{L4}^*(\lambda, n) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{L4}(-\lambda, -n) & -a_{L2}(-\lambda, -n) \\ -a_{L3}(-\lambda, -n) & a_{L1}(-\lambda, -n) \end{pmatrix}.$$

On peut alors obtenir, en utilisant cette égalité et le Lemme 1.3.2, le coefficient de réflexion à droite correspondant au potentiel  $a^*$  en fonction du coefficient de réflexion à gauche correspondant au potentiel  $a$  par le calcul suivant :

$$\begin{aligned} R^*(\lambda, n) &= -\frac{a_{L2}^*(\lambda, n)}{a_{L1}^*(\lambda, n)} \\ &= \frac{a_{L2}(-\lambda, -n)}{a_{L4}(-\lambda, -n)} \\ &= \frac{a_{L3}(-\lambda, -n)}{a_{L1}(-\lambda, -n)} \\ &= -\frac{a_{L3}(-\lambda, n)}{a_{L1}(-\lambda, n)} \\ &= -\overline{L(-\lambda, n)}. \end{aligned}$$

Rappelons que, dans le Théorème 1.1.3, étant donné  $B \in ]0, \min(A, \tilde{A})[$ , nous avons montré l'équivalence des assertions suivantes :

$$\begin{aligned} (i) \quad L(\lambda, n) &= \tilde{L}(\lambda, n) + O\left(e^{-2nB}\right). \\ (ii) \quad \exists k \in \mathbb{Z}, \quad a(x) &= \tilde{a}\left(x + \frac{k\pi}{\lambda}\right), \quad \forall x \leq h(B) = \tilde{h}(B) - \frac{k\pi}{\lambda}. \end{aligned}$$

En posant comme on l'a fait  $a^*(x) = a(-x)$ , pour tout  $x \in \mathbb{R}$ , d'après notre calcul précédent, on a  $L(\lambda, n) = -\overline{R^*(-\lambda, n)}$  et de même  $\tilde{L}(\lambda, n) = -\overline{\tilde{R}^*(-\lambda, n)}$ . On obtient

alors l'équivalence

$$\begin{aligned} L(\lambda, n) &= \tilde{L}(\lambda, n) + O(e^{-2nB}) \\ \Leftrightarrow R^*(-\lambda, n) &= \tilde{R}^*(-\lambda, n) + O(e^{-2nB}). \end{aligned} \quad (1.4.29)$$

D'autre part, puisque  $a^*(x) = a(-x)$  pour tout  $x \in \mathbb{R}$ , on a, si  $a(x) = \tilde{a}\left(x + \frac{k\pi}{\lambda}\right)$  sur  $] -\infty, b]$ , pour tout  $x \leq b$  :

$$\begin{aligned} a^*(-x) &= a(x) \\ &= \tilde{a}\left(x + \frac{k\pi}{\lambda}\right) \\ &= \tilde{a}^*\left(-x - \frac{k\pi}{\lambda}\right). \end{aligned}$$

Ainsi, en changeant  $x$  en  $-x$  dans  $a^*$ , on obtient l'équivalence suivante :

$$a(x) = \tilde{a}\left(x + \frac{k\pi}{\lambda}\right), \quad \forall x \leq b \quad \Leftrightarrow \quad a^*(x) = \tilde{a}^*\left(x - \frac{k\pi}{\lambda}\right), \quad \forall x \geq -b.$$

On remarque ensuite que

$$\begin{aligned} g^*(-b) &= \int_{-\infty}^{-b} a^*(x) dx \\ &= \int_{-\infty}^{-b} a(-x) dx \\ &= \int_b^{\infty} a(x) dx \\ &= A - g(b), \end{aligned}$$

donc, en appliquant  $h^*$  on obtient  $-b = h^*(A - g(b))$  et en prenant  $b = h(B)$  on a  $-h(B) = h^*(A - B)$ . On obtient alors les équivalences suivantes :

$$\begin{aligned} a(x) &= \tilde{a}\left(x + \frac{k\pi}{\lambda}\right), \quad \forall x \leq h(B) = \tilde{h}(B) - \frac{k\pi}{\lambda} \\ \Leftrightarrow a^*(x) &= \tilde{a}^*\left(x - \frac{k\pi}{\lambda}\right), \quad \forall x \geq -h(B) = -\tilde{h}(B) + \frac{k\pi}{\lambda} \\ \Leftrightarrow a^*(x) &= \tilde{a}^*\left(x - \frac{k\pi}{\lambda}\right), \quad \forall x \geq h^*(A - B) = \tilde{h}^*(A - B) + \frac{k\pi}{\lambda}. \end{aligned}$$

Finalement, en utilisant cette dernière équivalence, l'équivalence (1.4.29) ainsi que l'équivalence (i)  $\Leftrightarrow$  (ii), on obtient :

$$\begin{aligned} R(-\lambda, n) &= \tilde{R}(-\lambda, n) + O\left(e^{-2nB}\right) \\ \Leftrightarrow \exists k \in \mathbb{Z}, \quad a(x) &= \tilde{a}\left(x - \frac{k\pi}{\lambda}\right), \quad \forall x \geq h(A - B) = \tilde{h}(\tilde{A} - B) - \frac{k\pi}{\lambda}. \end{aligned}$$

Enfin, en changeant  $\lambda$  en son opposé, on obtient bien l'équivalence (iii)  $\Leftrightarrow$  (iv).  $\square$

#### 1.4.4 Preuve du Théorème 1.1.5.

Supposons que

$$T(\lambda, n) = \tilde{T}(\lambda, n) + O\left(e^{-2nB}\right),$$

avec  $B > \max(A, \tilde{A})$ . D'après les asymptotiques données par le Théorème 1.3.7 cette hypothèse implique que  $A = \tilde{A}$ . Ainsi, en utilisant cette égalité, le Théorème 1.3.7 et notre hypothèse on obtient

$$\begin{aligned} a_{L1}(\lambda, n) - \tilde{a}_{L1}(\lambda, n) &= a_{L1}(\lambda, n) \tilde{a}_{L1}(\lambda, n) \left( \frac{1}{\tilde{a}_{L1}(\lambda, n)} - \frac{1}{a_{L1}(\lambda, n)} \right) \\ &= a_{L1}(\lambda, n) \tilde{a}_{L1}(\lambda, n) (\tilde{T}(\lambda, n) - T(\lambda, n)) \\ &= O\left(e^{-2n(B-A)}\right). \end{aligned}$$

Considérons à présent pour  $z \in \Omega$ , l'application

$$F(z) = \frac{a_{L1}(\lambda, z) - \tilde{a}_{L1}(\lambda, z)}{z + 1} e^{-zA}.$$

Comme nous l'avons vu précédemment,  $F$  est dans l'espace de Hardy  $H_+^2$  et  $F(n) = O\left(e^{-(2B-A)n}\right)$ . D'après la Proposition 1.4.2, on a de plus

$$|F(z)| \leq \frac{\|F\|}{\sqrt{4\pi \operatorname{Re} z}} e^{-(2B-A)\operatorname{Re} z}, \quad \forall z \in \Omega. \quad (1.4.30)$$

Ainsi, il existe une constante  $C > 0$  telle que pour tout  $z > 0$ ,

$$|a_{L1}(\lambda, z) - \tilde{a}_{L1}(\lambda, z)| = |F(z)| |z + 1| e^{zA} \leq C \sqrt{z} e^{-2z(B-A)}.$$

L'application  $z \mapsto f(z) := a_{L1}(\lambda, z) - \tilde{a}_{L1}(\lambda, z)$  est donc bornée sur  $\mathbb{R}^+$  et par parité des applications  $z \mapsto a_{L1}(\lambda, z)$  et  $z \mapsto \tilde{a}_{L1}(\lambda, z)$  elle est en réalité bornée sur  $\mathbb{R}$ . De plus, cette application est de type exponentiel (voir Théorème 1.3.7) et bornée sur  $i\mathbb{R}$  (voir Lemme 1.3.3). Le Théorème de Phragmén-Lindelöf, appliqué dans chacun des quatre

cadrans du plan complexe, implique alors que  $f$  est bornée sur  $\mathbb{C}$ . Ainsi, d'après le Théorème de Liouville,  $f(z) = f(0) = 0$  pour tout  $z \in \mathbb{C}$ , autrement dit pour tout  $z \in \mathbb{C}$ ,  $a_{L1}(\lambda, z) = a_{L1}(\lambda, z)$ . On conclut alors la preuve du Théorème 1.1.5 en utilisant la Proposition 1.7.5.  $\square$

## 1.5 Application aux trous noirs de type RN-dS

Dans cette Section, on adapte le résultat d'unicité local précédent au cadre de la Relativité Générale et plus précisément à des trous noirs de type Reissner-Nordström-de Sitter. On rappelle que le lien entre de tels trous noirs et les VAHSS a déjà été donné dans [DN11]. En considérant la diffusion de champs de Dirac non-massifs évoluant dans la région extérieure d'un trou noir de type RN-dS, nous allons montrer que la connaissance partielle d'un des coefficients de réflexion (1.1.10) - (1.1.11) correspondant ne détermine pas seulement la métrique du trou noir dans un voisinage de l'horizon des événements ou de l'horizon cosmologique (voir les définitions plus bas), mais détermine en réalité toute la métrique. Ceci est dû au fait que la métrique d'un trou noir de type RN-dS ne dépend uniquement que de trois paramètres - la masse et la charge électrique du trou noir ainsi que la constante cosmologique positive de l'univers - qui peuvent être déduits de la forme explicite de la métrique dans les voisinages des horizons.

### 1.5.1 Trous noirs de type Reissner-Nordström-de Sitter

On renvoie le lecteur au livre de Wald [Wal84] pour plus de détails au sujet des trous noirs. Nous rappelons ici les faits essentiels donnés dans [DN10, DN11] concernant les trous noirs de type Reissner-Nordström-de Sitter (RN-dS). On note que ces trous noirs feront également l'objet du chapitre suivant et que leur description y sera largement rappelée. Tout d'abord, les trous noirs de type RN-dS sont des solutions à symétrie sphérique et électriquement chargées des équations de Einstein-Maxwell. Dans les coordonnées de Schwarzschild, la région extérieure d'un trou noir de type RN-dS est décrite par la variété de dimension quatre  $\mathcal{M} = \mathbb{R}_t \times ]r_-, r_+[_r \times \mathbb{S}_{\theta, \varphi}^2$  équipée de la métrique lorentzienne

$$\tau = F(r) dt^2 - F(r)^{-1} dr^2 - r^2 (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\varphi^2), \quad (1.5.1)$$

où

$$F(r) = 1 - \frac{2M}{r} + \frac{Q^2}{r^2} - \frac{\Lambda}{3} r^2. \quad (1.5.2)$$

### 1.5. Application aux trous noirs de type RN-dS

---

Les constantes  $M > 0$  et  $Q \in \mathbb{R}$  apparaissant dans (1.5.2) sont respectivement interprétées comme étant la masse et la charge électrique du trou noir alors que  $\Lambda > 0$  désigne la constante cosmologique de l'univers. On suppose ici que la fonction  $F(r)$  possède trois racines positives simples  $0 < r_c < r_- < r_+$  et une racine négative  $r_n < 0$ . Ceci est toujours vrai si l'on suppose par exemple que  $Q^2 < \frac{9}{8}M^2$  et que  $\Lambda M^2$  est assez petit (voir [Lak79]). La sphère  $\{r = r_c\}$  est appelée l'horizon de Cauchy alors que les sphères  $\{r = r_-\}$  et  $\{r = r_+\}$  désignent respectivement l'horizon des événements et l'horizon cosmologique. Ces horizons apparaissant comme des singularités de la métrique (1.5.1) sont en réalité dues à notre choix de coordonnées. En d'autres termes, en utilisant un système de coordonnées approprié, ces horizons peuvent être vue comme des hypersurfaces régulières qui peuvent être traversées dans un sens mais requiert une vitesse plus grande que la vitesse de la lumière pour être traversées dans l'autre sens. C'est pourquoi elle sont nommées des horizons.

Dans ce qui suit, nous allons considérer la région extérieure du trou noir, c'est-à-dire la région  $\{r_- < r < r_+\}$  située entre l'horizon des événements et l'horizon cosmologique. On note que la fonction  $F$  est positive dans cette région. Le point de vue implicitement adopté ici est celui d'un observateur statique situé loin des horizons du trou noir. On pense typiquement à un télescope situé sur Terre visant le trou noir ou l'horizon cosmologique. On voit ces observateurs comme vivant sur des lignes d'univers  $\{r = r_0\}$  avec  $r_- \ll r_0 \ll r_+$ . La variable  $t$  correspond alors à la vraie perception du temps. Du point de vue de nos observateurs statiques, les horizons sont vus comme les limites *observables* de l'univers. Ceci peut être plus facilement compris si l'on remarque que les horizons ne peuvent jamais être traversés en un temps fini  $t$  par des géodésiques rentrantes ou sortantes, ces géodésiques étant les trajectoires des rayons lumineux émis radialement par rapport au trou noir ou à l'horizon cosmologique. Ces deux horizons sont donc perçus comme des *régions asymptotiques* par nos observateurs statiques.

Plutôt que de travailler avec la variable radiale  $r$  nous faisons le choix de décrire la région extérieure du trou noir à l'aide de la variable radiale de Regge-Wheeler (RW) qui est plus naturelle lorsque l'on étudie des propriétés de diffusion de champs. La variable de RW,  $x$ , est définie implicitement par  $\frac{dx}{dr} = F^{-1}(r)$ , ou explicitement par

$$x = \frac{1}{2\kappa_n} \ln(r - r_n) + \frac{1}{2\kappa_c} \ln(r - r_c) + \frac{1}{2\kappa_-} \ln(r - r_-) + \frac{1}{2\kappa_+} \ln(r_+ - r) + c, \quad (1.5.3)$$

où  $c$  est une constante d'intégration et les quantités  $\kappa_j$ ,  $j = n, c, -, +$  sont définies par

$$\kappa_n = \frac{1}{2}F'(r_n), \quad \kappa_c = \frac{1}{2}F'(r_c), \quad \kappa_- = \frac{1}{2}F'(r_-), \quad \kappa_+ = \frac{1}{2}F'(r_+). \quad (1.5.4)$$

Les constantes  $\kappa_- > 0$  et  $\kappa_+ < 0$  sont respectivement appelées les gravités de surfaces de l'horizon des événements et de l'horizon cosmologique. On note grâce à (1.5.3) que les horizons  $\{r = r_\pm\}$  sont envoyés aux infinis  $\{x = \pm\infty\}$  par la variable de RW. On note également que les géodésiques radiales entrantes et sortantes deviennent des lignes droites  $\{x = \pm t\}$  dans ce nouveau système de coordonnées. Ceci fournit une façon naturelle de définir les données de diffusion simplement en suivant les définitions usuelles dans l'espace-temps de Minkowski.

### 1.5.2 Équation de Dirac dans un trou noir de type RN-dS

Nous considérons des champs de Dirac non-massifs se propageant dans la région extérieure d'un trou noir de type RN-dS. On renvoie à [Mel03, Nic95] pour une étude détaillée de cette équation dans ce contexte incluant une théorie complète de la diffusion dépendante du temps. Nous allons utiliser l'expression de cette équation utilisée dans ces travaux comme point de départ de notre étude. Ainsi, les champs de Dirac non-massifs considérés sont représentés par des spineurs  $\psi$  à deux composantes appartenant à l'espace de Hilbert  $L^2(\mathbb{R} \times \mathbb{S}^2; \mathbb{C}^2)$  et satisfaisant l'équation d'évolution

$$i\partial_t\psi = \left(\Gamma^1 D_x + a(x)\mathbb{D}_{\mathbb{S}^2}\right)\psi. \quad (1.5.5)$$

Le symbole  $D_x$  représente  $-i\partial_x$  alors que  $\mathbb{D}_{\mathbb{S}^2}$  désigne l'opérateur de Dirac sur  $\mathbb{S}^2$  qui, en coordonnées sphériques, prend la forme (1.2.11). Le potentiel  $a$  est une fonction scalaire lisse donnée en termes de la métrique (1.5.1)-(1.5.2) par

$$a(x) = \frac{\sqrt{F(r(x))}}{r(x)}, \quad (1.5.6)$$

où  $r(x)$  est le difféomorphisme inverse de (1.5.3). Il est montré dans [DN11] que le potentiel  $a$  vérifie les hypothèses (1.1.2). Enfin, les matrices  $\Gamma^1$ ,  $\Gamma^2$  et  $\Gamma^3$  apparaissant dans (1.5.5) et (1.2.11) sont les matrices de Dirac  $2 \times 2$  usuelles qui satisfont les relations d'anticommutativité (1.2.9). Comme précédemment, nous allons travailler avec la représentation suivante de ces matrices

$$\Gamma^1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad \Gamma^2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \Gamma^3 = \begin{pmatrix} 0 & i \\ -i & 0 \end{pmatrix}.$$

L'équation de Dirac sans masse dans la région extérieure d'un trou noir de type RN-dS peut ainsi être mise sous la même forme que l'équation de Dirac sans masse sur une

VAHSS étudiée dans les Sections précédentes. On peut donc définir les coefficients de transmission  $T(\lambda, n)$  et les coefficients de réflexion  $L(\lambda, n)$  et  $R(\lambda, n)$  pour une énergie fixée  $\lambda \in \mathbb{R}$  et pour tout moment angulaire  $n \in \mathbb{N}^*$  comme précédemment. De plus, le Théorème 1.1.3 reste valide dans ce nouveau cadre. En utilisant la forme particulière du potentiel  $a$  donnée dans (1.5.6), on peut cependant légèrement améliorer ces résultats dans ce cas.

### 1.5.3 Unicité des paramètres

**Théoreme 1.5.1.** *En utilisant les notations du Théorème 1.1.3, les assertions suivantes sont équivalentes :*

- (i)  $L(\lambda, n) = \tilde{L}(\lambda, n) + O(e^{-2nB})$ .
- (ii)  $R(\lambda, n) = \tilde{R}(\lambda, n) + O(e^{-2nB})$ .
- (iii)  $M = \tilde{M}, \quad Q^2 = \tilde{Q}^2 \quad \text{et} \quad \Lambda = \tilde{\Lambda}$ .
- (iv)  $\exists k \in \mathbb{Z}, \quad a(x) = \tilde{a}\left(x + \frac{k\pi}{\lambda}\right), \quad \forall x \in \mathbb{R}$ .

*Démonstration.* La premier point de la preuve consiste à montrer que la connaissance du potentiel  $a$  sur  $] -\infty, b]$ , où  $b \in \mathbb{R}$ , nous permet de déterminer  $M$ ,  $Q^2$  et  $\Lambda$  en utilisant la méthode de [DN11] p. 43-44. On rappelle que

$$a^2(x) = \frac{F(r)}{r^2} = \frac{1}{r^2} - \frac{2M}{r^3} + \frac{Q^2}{r^4} - \frac{\Lambda}{3}, \quad (1.5.7)$$

où  $r = r(x)$  est l'inverse du difféomorphisme de Regge-Wheeler. Pour démontrer le résultat voulu on introduit l'opérateur différentiel  $B$  suivant :

$$B = \frac{1}{a^2(x)} \frac{d}{dx} = r^2 \frac{d}{dr},$$

car  $\frac{dr}{dx} = F(r)$ . En utilisant la notation  $B^2 = B \circ B$ , etc..., un calcul immédiat donne

$$\begin{aligned} B(a^2) &= -\frac{2}{r} + \frac{6M}{r^2} - \frac{4Q^2}{r^3}, \\ B^2(a^2) &= 2 - \frac{12M}{r} + \frac{12Q^2}{r^2}, \end{aligned} \quad (1.5.8)$$

$$B^3(a^2) = 12M - \frac{24Q^2}{r}, \quad (1.5.9)$$

$$B^4(a^2) = 24Q^2. \quad (1.5.10)$$



On pose à présent  $\tilde{x} = x + \frac{k\pi}{\lambda}$  et on utilise (1.4.22). On remarque alors que pour tout  $x \in ]-\infty, b]$  :

$$B = \frac{1}{\tilde{a}^2(\tilde{x})} \frac{d}{d\tilde{x}} = \frac{1}{a^2(x)} \frac{d}{dx}.$$

On applique cet opérateur différentiel à l'égalité  $\tilde{a}(\tilde{x})^2 = a(x)^2$ , pour tout  $x \in ]-\infty, b]$ . Pour simplifier les notations on pose  $\tilde{r} = \tilde{r}(\tilde{x})$  et  $r = r(x)$ . En utilisant (1.5.10) et (1.5.9), on obtient successivement, pour tout  $x \in ]-\infty, b]$  :

$$\begin{aligned} Q^2 &= \tilde{Q}^2, \\ \frac{1}{\tilde{r}} - \frac{1}{r} &= \frac{\tilde{M} - M}{2Q^2} := E. \end{aligned}$$

En utilisant (1.5.8), on obtient alors

$$\frac{M + \tilde{M}}{2} E = (\tilde{M} - EQ^2) E = \frac{M - \tilde{M} + 2Q^2 E}{r} = 0. \quad (1.5.11)$$

On déduit donc de (1.5.11) que  $E = 0$ , puisque  $M, \tilde{M} > 0$ . On a ainsi montré que  $M = \tilde{M}$  et  $r = \tilde{r}$  sur  $] -\infty, b]$ . En utilisant à présent (1.5.7), on obtient  $\Lambda = \tilde{\Lambda}$ . Ceci achève le premier point de notre preuve. On remarque qu'il est clair que si l'on suppose connu le potentiel  $a$  sur une demi-droite de la forme  $[b, +\infty[$  le calcul précédent nous permet à nouveau de retrouver les paramètres du trou noir.

On est à présent en mesure d'achever la preuve du Théorème 1.5.1. On commence par utiliser le Théorème 1.1.3 pour obtenir l'égalité des potentiels  $a$  et  $\tilde{a}$  sur la demi-droite  $] -\infty, b_1]$  (respectivement  $[b_2, +\infty[$ ),  $b_1 < b_2 \in \mathbb{R}$ . Alors, d'après notre calcul précédent, on obtient que ces informations sont suffisantes pour obtenir l'unicité de la masse  $M$ , du carré de la charge  $Q^2$  et de la constante cosmologique  $\Lambda$ . Finalement, puisque les paramètres du trou noir déterminent sa métrique de manière unique, on obtient l'égalité des potentiels  $a$  et  $\tilde{a}$  sur  $\mathbb{R}$  (à une translation près comme énoncé dans (iv)).  $\square$

## 1.6 Reformulation des résultats principaux

Dans cette Section, on se propose de reformuler le Théorème 1.1.3 en un sens plus général en évitant d'utiliser une décomposition sur des harmoniques sphériques généralisées. Plus précisément, on remplace les hypothèses principales (1.1.10) et (1.1.11) par des conditions sur les normes des opérateurs de réflexion globaux en tant qu'opérateurs sur  $L^2(\mathbb{S}^2)$ . On commence par rappeler la définition et les propriétés essentielles de ces opérateurs.

**Proposition 1.6.1.** *Pour tout  $(n, k) \in I$  où  $I = \{n \in \mathbb{N}^*, k \in 1/2 + \mathbb{Z}, |k| \leq n - \frac{1}{2}\}$ , on utilise la notation  $Y_{kn} = (Y_{kn}^1, Y_{kn}^2)$  pour les harmoniques sphériques généralisées correspondantes.*

1) *Les familles  $\{Y_{kn}^1\}_{(n,k) \in I}$  et  $\{Y_{kn}^2\}_{(n,k) \in I}$  forment des bases hilbertiennes de  $\mathfrak{l} = L^2(\mathbb{S}^2; \mathbb{C})$ . Plus précisément, pour tout  $\psi \in \mathfrak{l}$ , on peut décomposer  $\psi$  sous la forme*

$$\psi = \sum_{(n,k) \in I} \psi_{kn}^j Y_{kn}^j, \quad j = 1, 2,$$

avec

$$\|\psi\|^2 = \frac{1}{2} \sum_{(n,k) \in I} |\psi_{kn}^j|^2.$$

2) *Soit  $\lambda \in \mathbb{R}$  une énergie fixée. Alors, les opérateurs de transmission  $T_L(\lambda)$  et  $T_R(\lambda)$  sont définis en tant qu'opérateurs de  $\mathfrak{l}$  dans  $\mathfrak{l}$  comme suit. Pour tout  $\psi = \sum_{(n,k) \in I} \psi_{kn}^j Y_{kn}^j \in \mathfrak{l}$ ,*

$$T_L(\lambda)\psi = T_L(\lambda) \left( \sum_{(n,k) \in I} \psi_{kn}^1 Y_{kn}^1(\lambda) \right) = \sum_{(n,k) \in I} \left( T(\lambda, n) \psi_{kn}^1 \right) Y_{kn}^1(\lambda),$$

et

$$T_R(\lambda)\psi = T_R(\lambda) \left( \sum_{(n,k) \in I} \psi_{kn}^2 Y_{kn}^2(\lambda) \right) = \sum_{(n,k) \in I} \left( T(\lambda, n) \psi_{kn}^2 \right) Y_{kn}^2(\lambda),$$

où les  $T(\lambda, n)$  sont les coefficients de transmission définis dans (1.3.10) - (1.3.11). Autrement dit, on écrit

$$T_L(\lambda)Y_{kn}^1 = T(\lambda, n)Y_{kn}^1, \quad T_R(\lambda)Y_{kn}^2 = T(\lambda, n)Y_{kn}^2, \quad \forall (n, k) \in I,$$

et ainsi les opérateurs  $T_L(\lambda)$  (respectivement  $T_R(\lambda)$ ) sont diagonalisables sur la base hilbertienne de fonctions propres  $(Y_{kn}^1)_{(k,n) \in I}$  (respectivement  $(Y_{kn}^2)_{(k,n) \in I}$ ) associée aux valeurs propres  $T(\lambda, n)$  (dans les deux cas).

3) *Soit  $\lambda \in \mathbb{R}$  une énergie fixée. Alors, les opérateurs de réflexion  $L(\lambda)$  et  $R(\lambda)$  sont définis en tant qu'opérateurs de  $\mathfrak{l}$  dans  $\mathfrak{l}$  comme suit. Pour tout  $\psi = \sum_{(n,k) \in I} \psi_{kn}^j Y_{kn}^j \in \mathfrak{l}$ ,*

$$R(\lambda)\psi = R(\lambda) \left( \sum_{(n,k) \in I} \psi_{kn}^2 Y_{kn}^2(\lambda) \right) = \sum_{(n,k) \in I} \left( R(\lambda, n) \psi_{kn}^2 \right) Y_{kn}^1(\lambda),$$

et

$$L(\lambda)\psi = L(\lambda) \left( \sum_{(n,k) \in I} \psi_{kn}^1 Y_{kn}^1(\lambda) \right) = \sum_{(n,k) \in I} \left( L(\lambda, n) \psi_{kn}^1 \right) Y_{kn}^2(\lambda),$$

où les  $R(\lambda, n)$  et  $L(\lambda, n)$  sont définis dans (1.3.10)-(1.3.11). Autrement dit, on écrit

$$R(\lambda)Y_{kn}^2 = R(\lambda, n)Y_{kn}^1, \quad L(\lambda)Y_{kn}^1 = L(\lambda, n)Y_{kn}^2, \quad \forall (n, k) \in I.$$

Il est facile à partir des définitions précédentes d'exprimer les normes des opérateurs de transmission  $T_L(\lambda)$  et  $T_R(\lambda)$  et des opérateurs de réflexion  $L(\lambda)$  et  $R(\lambda)$  en tant qu'opérateurs de  $L^2(\mathbb{S}^2)$  en termes des coefficients  $T(\lambda, n)$ ,  $L(\lambda, n)$  et  $R(\lambda, n)$ . Pour un  $\lambda \in \mathbb{R}$  fixé, on a

$$\begin{aligned} \|T_L(\lambda)\| &= \|T_R(\lambda)\| = \|T(\lambda, n)\|_\infty, \\ \|L(\lambda)\| &= \|L(\lambda, n)\|_\infty, \quad \|R(\lambda)\| = \|R(\lambda, n)\|_\infty. \end{aligned} \quad (1.6.1)$$

Pour reformuler les hypothèses (1.1.10) et (1.1.11) en termes de conditions sur des normes  $L^2(\mathbb{S}^2)$  d'opérateurs, on observe que l'opérateur auto-adjoint  $|\mathbb{D}_{\mathbb{S}^2}|$  agit comme une multiplication par  $n$  sur chaque harmonique sphérique généralisée  $Y_{kn}$  de la décomposition hilbertienne  $L^2(\mathbb{S}^2, \mathbb{C}^2) = \oplus_{(n,k) \in I} \mathbb{C}^2 \otimes Y_{kn}$ . On note à nouveau  $|\mathbb{D}_{\mathbb{S}^2}|$  la restriction de cet opérateur. Ainsi,  $|\mathbb{D}_{\mathbb{S}^2}|$  agit comme une multiplication par  $n$  sur chaque harmonique sphérique généralisée  $Y_{kn}^1$  ou  $Y_{kn}^2$  des deux décompositions hilbertiennes  $\mathfrak{l} = \oplus_{(n,k) \in I} \mathbb{C} \otimes Y_{kn}^j$ ,  $j = 1, 2$ .

Soient  $\lambda \in \mathbb{R}$  et  $0 < B < \min(A, \tilde{A})$ . Alors, en utilisant (1.6.1), les hypothèses (1.1.10) et (1.1.11) pour les coefficients de réflexion peuvent être réécrites sous la forme

$$(1.1.10) \quad \Longleftrightarrow \quad \left\| e^{2B|\mathbb{D}_{\mathbb{S}^2}|} \left( L(\lambda) - \tilde{L}(\lambda) \right) \right\|_{\mathcal{B}(\mathfrak{l})} = O(1),$$

et

$$(1.1.11) \quad \Longleftrightarrow \quad \left\| e^{2B|\mathbb{D}_{\mathbb{S}^2}|} \left( R(\lambda) - \tilde{R}(\lambda) \right) \right\|_{\mathcal{B}(\mathfrak{l})} = O(1).$$

De même, soit  $B > \max(A, \tilde{A})$ . Alors, l'hypothèse (1.1.15) sur le coefficient de transmission peut être réécrite sous la forme

$$\begin{aligned} (1.1.15) \quad &\Longleftrightarrow \quad \left\| e^{2B|\mathbb{D}_{\mathbb{S}^2}|} \left( T_L(\lambda) - \tilde{T}_L(\lambda) \right) \right\|_{\mathcal{B}(\mathfrak{l})} = O(1), \\ &\Longleftrightarrow \quad \left\| e^{2B|\mathbb{D}_{\mathbb{S}^2}|} \left( T_R(\lambda) - \tilde{T}_R(\lambda) \right) \right\|_{\mathcal{B}(\mathfrak{l})} = O(1). \end{aligned}$$

## 1.7 Addendum : les coefficients de transmission

Dans [DN11], Theorem 1.1, il est dit que la connaissance des coefficients de transmission  $T(\lambda, n)$  pour une énergie fixée  $\lambda \neq 0$  et pour tout  $n \in \mathcal{L}$  où  $\mathcal{L}$  est un sous-ensemble de

$\mathbb{N}^*$  satisfaisant la condition de Müntz

$$\sum_{n \in \mathcal{L}} \frac{1}{n} = +\infty,$$

détermine de façon unique la fonction  $a(x)$  à translations près. L'ingrédient principal de la preuve se trouve dans la Proposition 3.13 de [DN11] qui énonce que

"Si  $T(\lambda, n) = \tilde{T}(\lambda, n)$  pour tout  $n \in \mathcal{L}$ , alors les coefficients de réflexion correspondants  $L(\lambda, n)$  et  $\tilde{L}(\lambda, n)$  (respectivement  $R(\lambda, n)$  et  $\tilde{R}(\lambda, n)$ ) coïncident à une constante multiplicative près".

La preuve de ce résultat donnée dans [DN11] est malheureusement incomplète. En réalité, ce dernier point n'est pas si clair et pourrait même être faux. Nous allons donner dans cet Addendum quelques idées de ce qui se passe lorsque l'on essaie de déterminer la métrique à partir du coefficient de transmission  $T(\lambda, n)$ . On commence par donner une version correcte du résultat précédent qui est plus faible que celle énoncée dans la Proposition 3.13 de [DN11].

**Proposition 1.7.1.** *Soient  $(\Sigma, \sigma)$  et  $(\Sigma, \tilde{\sigma})$  deux VAHSS dont les métriques dépendent des fonctions  $a(x)$  et  $\tilde{a}(x)$  satisfaisant les hypothèses (1.1.1) - (1.1.2). Pour une énergie  $\lambda \neq 0$  fixée, on considère les familles dénombrables de coefficients de transmission  $T(\lambda, n)$  et  $\tilde{T}(\lambda, n)$ ,  $n \in \mathbb{N}^*$ , correspondantes. On considère également un sous-ensemble  $\mathcal{L}$  de  $\mathbb{N}^*$  satisfaisant une condition de Müntz  $\sum_{n \in \mathcal{L}} \frac{1}{n} = \infty$ . Supposons que*

$$T(\lambda, n) = \tilde{T}(\lambda, n), \quad \forall n \in \mathcal{L}.$$

Alors

$$T(\lambda, z) = \tilde{T}(\lambda, z), \quad \forall z \in \mathbb{C}.$$

Supposons de plus que  $\frac{1}{\kappa_+} + \frac{1}{\kappa_-} < 0$ .

- Si  $\frac{1}{\kappa_+} + \frac{1}{\kappa_-} < 0$ , il existe une fraction rationnelle  $g(z)$  telle que

$$L(\lambda, z) = g(z)\tilde{L}(\lambda, z), \quad \forall z \in \mathbb{C}.$$

- Si  $\frac{1}{\kappa_+} + \frac{1}{\kappa_-} > 0$  et  $\left(\frac{\tilde{a}_-}{a_+}\right)^{\frac{i\lambda}{\kappa_+}} = \left(\frac{\tilde{a}_+}{a_-}\right)^{\frac{i\lambda}{\kappa_-}}$ , il existe une fraction rationnelle  $h(z)$  telle

que

$$L(\lambda, z) = h(z)\tilde{R}(\lambda, z), \quad \forall z \in \mathbb{C}.$$

*Démonstration.* Par définition des coefficients de transmission et en utilisant [DN11], Corollary 3.9 et Theorem 3.10, notre hypothèse implique immédiatement que

$$T(\lambda, z) = \tilde{T}(\lambda, z), \quad \forall z \in \mathbb{C},$$

où de façon équivalente

$$a_{L1}(\lambda, z) = \tilde{a}_{L1}(\lambda, z), \quad \forall z \in \mathbb{C}. \quad (1.7.1)$$

On pose alors  $f(z) = \frac{a_{L3}(\lambda, z)}{z}$ . En remarquant que  $a_{L3}(\lambda, 0) = 0$ , on voit que  $f(z)$  est une fonction entière paire d'ordre 1 grâce au Lemme 1.3.2. Ainsi, on peut écrire  $f(z) = g(z^2)$  où  $g$  est une fonction entière d'ordre  $\frac{1}{2}$ . En utilisant le Théorème de factorisation de Hadamard, on obtient l'expression suivante de  $f$

$$f(z) = G z^{2m} \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{z^2}{z_n^2}\right), \quad (1.7.2)$$

où  $2m$  est la multiplicité de 0,  $G$  est une constante et les  $z_n$  sont les zéros de  $f$  appartenant à  $\mathbb{C}^+ = \{z \in \mathbb{C}, \operatorname{Im}(z) > 0 \text{ ou } \operatorname{Im}(z) = 0 \text{ et } \operatorname{Re}(z) > 0\}$  comptés avec multiplicité. De (1.7.1) et du Lemme 1.3.2, (iii), on déduit que

$$f(z)\overline{f(\bar{z})} = \tilde{f}(z)\overline{\tilde{f}(\bar{z})},$$

où  $\tilde{f}(z) = \frac{\tilde{a}_{L3}(\lambda, z)}{z}$ . Ainsi,

$$|G|^2 z^{4m} \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{z^2}{z_n^2}\right) \left(1 - \frac{z^2}{\bar{z}_n^2}\right) = |\tilde{G}|^2 z^{4\tilde{m}} \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{z^2}{\tilde{z}_n^2}\right) \left(1 - \frac{z^2}{(\bar{\tilde{z}}_n)^2}\right).$$

On en déduit que  $|G| = |\tilde{G}|$ ,  $m = \tilde{m}$  et

$$z_n = \pm \tilde{z}_n \quad \text{ou} \quad z_n = \pm \bar{\tilde{z}}_n, \quad \forall n \in \mathbb{N}^*. \quad (1.7.3)$$

**Remarque 1.7.2.** 1. C'est dans l'Équation (1.7.3) que se trouve l'erreur dans [DN11], Proposition 3.13., puisque les auteurs affirment que

$$z_n = \tilde{z}_n, \quad \forall n \in \mathbb{N}^*.$$

2. Si  $\text{Im}(z_n) > 0$ , alors on doit avoir

$$z_n = \tilde{z}_n \text{ ou } z_n = -\bar{\tilde{z}}_n, \quad \forall n \in \mathbb{N}^*. \quad (1.7.4)$$

Ainsi, les zéros  $z_n$  et  $\tilde{z}_n$  ayant une partie imaginaire positive coïncident à une conjugaison complexe "-" près.

D'un autre côté, si  $\text{Im}(z_n) = 0$  et  $\text{Re}(z_n) > 0$ , alors l'égalité

$$z_n = \tilde{z}_n, \quad (1.7.5)$$

reste vraie.

Dans certains cas, on peut montrer que les grand zéros  $z_n$  et  $\tilde{z}_n$  coïncident en utilisant les asymptotiques de  $a_{L3}(\lambda, z)$  pour  $z$  grand dans le plan complexe que l'on rappelle dans le Lemme suivant.

**Lemme 1.7.3.** Pour  $|z|$  grand dans le plan complexe, on a

$$\begin{aligned} a_{L1}(\lambda, z) &= \frac{1}{2\pi} \left( -\frac{\kappa_+}{a_+} \right)^{\frac{i\lambda}{\kappa_+}} \left( \frac{\kappa_-}{a_-} \right)^{-\frac{i\lambda}{\kappa_-}} \Gamma(1 - \nu_+) \Gamma(1 - \mu_-) \left( \frac{z}{2} \right)^{i\lambda \left( \frac{1}{\kappa_-} - \frac{1}{\kappa_+} \right)} \\ &\quad \times \left( e^{zA} \left( 1 + O\left(\frac{1}{z}\right) \right) + e^{-zA} e^{-\text{sg}(\text{Im}(z))\pi\lambda \left( \frac{1}{\kappa_+} - \frac{1}{\kappa_-} \right)} \left( 1 + O\left(\frac{1}{z}\right) \right) \right), \\ a_{L3}(\lambda, z) &= \frac{i}{2\pi} \left( -\frac{\kappa_+}{a_+} \right)^{\frac{i\lambda}{\kappa_+}} \left( \frac{\kappa_-}{a_-} \right)^{\frac{i\lambda}{\kappa_-}} \Gamma(1 - \nu_+) \Gamma(1 - \nu_-) \left( \frac{z}{2} \right)^{-i\lambda \left( \frac{1}{\kappa_-} + \frac{1}{\kappa_+} \right)} \\ &\quad \times \left( e^{zA} \left( 1 + O\left(\frac{1}{z}\right) \right) + e^{-zA} e^{\text{sg}(\text{Im}(z))i\pi \left( 1 + i\lambda \left( \frac{1}{\kappa_+} + \frac{1}{\kappa_-} \right) \right)} \left( 1 + O\left(\frac{1}{z}\right) \right) \right), \end{aligned}$$

où  $\text{sg}$  est la fonction signe.

*Démonstration.* La preuve de ce Lemme est une conséquence immédiate de (1.3.45) et (1.3.46) d'après les asymptotiques obtenues dans [FY05], Eqs (3.13)-(3.23).  $\square$

On déduit du Lemme 1.7.3 les asymptotiques des grand zéros  $z_n$  ayant une partie imaginaire positive.

**Corollaire 1.7.4.** Il existe  $p \in \mathbb{Z}$  tel que pour  $n$  grand, on a

$$z_n = i \frac{\pi}{A} (n + p) - \frac{\lambda\pi}{2A} \left( \frac{1}{\kappa_+} + \frac{1}{\kappa_-} \right) + O\left(\frac{1}{n}\right).$$

*Démonstration.* En utilisant (1.3.45), on voit que les  $z_n$  sont les zéros de la fonction caractéristique  $\Delta(\lambda, z)$ . Le résultat découle alors de [FY05], Theorem 3.2.  $\square$

On déduit du Corollaire 1.7.4 et de la Remarque précédente qu'il existe  $N \in \mathbb{N}$  suffisamment grand tel que pour tout  $n > N$ , on a

$$z_n = \tilde{z}_n \quad \text{ou} \quad z_n = -\tilde{\tilde{z}}_n.$$

Supposons à partir de maintenant que  $\frac{1}{\kappa_+} + \frac{1}{\kappa_-} < 0$ . On en déduit que les grands zéros de  $a_{L3}(\lambda, z)$  ayant une partie imaginaire positive sont localisés dans le cadran  $I = \{z \in \mathbb{C}, \operatorname{Re}(z) > 0, \operatorname{Im}(z) > 0\}$ . Par parité, les zéros ayant une partie imaginaire négative sont localisés dans le cadran  $III = \{z \in \mathbb{C}, \operatorname{Re}(z) < 0, \operatorname{Im}(z) < 0\}$ . Puisque les  $\tilde{z}_n$  ayant une partie imaginaire positive vérifient les asymptotiques du Corollaire 1.7.4, on obtient la dichotomie suivante.

- Si  $\frac{1}{\tilde{\kappa}_+} + \frac{1}{\tilde{\kappa}_-} < 0$ , alors les zéros  $\tilde{z}_n$  ayant une partie imaginaire positive sont localisés dans le cadran  $I$ . Ainsi, en utilisant (1.7.4), on obtient l'existence de  $N \in \mathbb{N}$  tel que

$$z_n = \tilde{z}_n, \quad \forall n \geq N. \quad (1.7.6)$$

En utilisant (1.7.1), le Lemme 1.7.3 et le Corollaire 1.7.4, on obtient dans ce cas

$$\frac{1}{\tilde{\kappa}_-} - \frac{1}{\tilde{\kappa}_+} = \frac{1}{\kappa_-} - \frac{1}{\kappa_+} \quad \text{et} \quad \frac{1}{\tilde{\kappa}_-} + \frac{1}{\tilde{\kappa}_+} = \frac{1}{\kappa_-} + \frac{1}{\kappa_+},$$

ce qui donne

$$\tilde{\kappa}_- = \kappa_-, \quad \tilde{\kappa}_+ = \kappa_+.$$

Ainsi, on utilise (1.7.2) et (1.7.6) pour obtenir

$$f(z) = \frac{G}{\tilde{G}} \prod_{n=1}^N \frac{\left(1 - \frac{z^2}{z_n^2}\right)}{\left(1 - \frac{z^2}{\tilde{z}_n^2}\right)} \tilde{f}(z). \quad (1.7.7)$$

Finalement, on note  $E_N = \{n \in \{1, \dots, N\}, z_n \neq \tilde{z}_n \text{ et } z_n \neq -\tilde{\tilde{z}}_n\}$ . On déduit alors de (1.7.7) que

$$f(z) = \frac{G}{\tilde{G}} \prod_{n \in E_N} \frac{\left(1 - \frac{z^2}{(\tilde{z}_n)^2}\right)}{\left(1 - \frac{z^2}{\tilde{\tilde{z}}_n^2}\right)} \tilde{f}(z). \quad (1.7.8)$$

On désigne par  $g(z)$  la fonction rationnelle

$$g(z) = \frac{G}{\tilde{G}} \prod_{n \in E_N} \frac{\left(1 - \frac{z^2}{(\tilde{z}_n)^2}\right)}{\left(1 - \frac{z^2}{\tilde{\tilde{z}}_n^2}\right)}$$

et on obtient finalement

$$a_{L3}(\lambda, z) = g(z)\tilde{a}_{L3}(\lambda, z),$$

et ainsi

$$L(\lambda, z) = g(z)\tilde{L}(\lambda, z).$$

- Si  $\frac{1}{\tilde{\kappa}_+} + \frac{1}{\tilde{\kappa}_-} > 0$ , alors les zéros  $\tilde{z}_n$  ayant une partie imaginaire positive sont localisés dans le cadran  $II = \{z \in \mathbb{C}, \operatorname{Re}(z) < 0, \operatorname{Im}(z) > 0\}$ . Ainsi, en utilisant (1.7.4), on obtient l'existence de  $N \in \mathbb{N}$  tel que

$$z_n = -\bar{\tilde{z}}_n, \quad \forall n \geq N. \quad (1.7.9)$$

En utilisant (1.7.1), le Lemme 1.7.3 et le Corollaire 1.7.4, on obtient dans ce cas

$$\frac{1}{\tilde{\kappa}_-} - \frac{1}{\tilde{\kappa}_+} = \frac{1}{\kappa_-} - \frac{1}{\kappa_+} \quad \text{et} \quad \frac{1}{\tilde{\kappa}_-} + \frac{1}{\tilde{\kappa}_+} = -\frac{1}{\kappa_-} - \frac{1}{\kappa_+},$$

ce qui donne

$$\tilde{\kappa}_- = -\kappa_+, \quad \tilde{\kappa}_+ = -\kappa_-.$$

En utilisant à nouveau (1.7.1) ainsi que les asymptotiques de  $a_{L1}(\lambda, z)$  données dans le Lemme 1.7.3, on obtient alors la condition nécessaire

$$\left(\frac{\tilde{a}_-}{a_+}\right)^{\frac{i\lambda}{\tilde{\kappa}_+}} = \left(\frac{\tilde{a}_+}{a_-}\right)^{\frac{i\lambda}{\tilde{\kappa}_-}}.$$

Ainsi, on utilise (1.7.2) et (1.7.9) pour obtenir

$$f(z) = \frac{G}{\tilde{G}} \prod_{n=1}^N \frac{\left(1 - \frac{z^2}{z_n^2}\right)}{\left(1 - \frac{z^2}{(\tilde{z}_n)^2}\right)} \overline{\tilde{f}(\tilde{z})}. \quad (1.7.10)$$

Finalement, on note  $F_N = \{n \in \{1, \dots, N\}, z_n \neq \tilde{z}_n \text{ et } z_n \neq -\tilde{z}_n\}$ . On déduit alors de (1.7.10) que

$$f(z) = \frac{G}{\tilde{G}} \prod_{n \in F_N} \frac{\left(1 - \frac{z^2}{z_n^2}\right)}{\left(1 - \frac{z^2}{(\tilde{z}_n)^2}\right)} \overline{\tilde{f}(\tilde{z})}. \quad (1.7.11)$$

En désignant par  $h(z)$  la fonction rationnelle



$$h(z) = \frac{G}{\overline{G}} \prod_{n \in F_N} \frac{\left(1 - \frac{z^2}{\bar{z}_n^2}\right)}{\left(1 - \frac{z^2}{(\bar{z}_n)^2}\right)},$$

on obtient finalement

$$a_{L3}(\lambda, z) = h(z) \overline{\tilde{a}_{L3}(\lambda, \bar{z})} = h(z) \tilde{a}_{L2}(\lambda, z),$$

et donc

$$L(\lambda, z) = -h(z) \tilde{R}(\lambda, z).$$

Ceci achève notre preuve de la Proposition.  $\square$

Même dans le cas où les coefficients de réflexion  $L(\lambda, z)$  et  $\tilde{L}(\lambda, z)$  (respectivement  $R(\lambda, z)$  et  $\tilde{R}(\lambda, z)$ ) coïncident à une *fraction rationnelle* près dans la variable  $z$ , on ne peut pas conclure au résultat énoncé dans [DN11], c'est-à-dire à l'égalité des fonctions  $a(x)$  et  $\tilde{a}(x)$  à une translation près. Cette question reste à ce jour ouverte et on peut conjecturer que la réponse est négative. On renvoie à la dernière Section de [DKN14] pour plus de détails sur ce point dans un modèle similaire et plus général. On peut malgré tout démontrer le résultat plus faible suivant.

**Proposition 1.7.5.** *Soient  $(\Sigma, \sigma)$  et  $(\Sigma, \tilde{\sigma})$  deux VAHSS. Supposons que*

$$\frac{1}{\kappa_+} + \frac{1}{\kappa_-} < 0 \quad \text{et} \quad \frac{1}{\tilde{\kappa}_+} + \frac{1}{\tilde{\kappa}_-} < 0.$$

*Soit  $\mathcal{L}$  un sous-ensemble de  $\mathbb{N}$  tel que  $\sum_{n \in \mathcal{L}} \frac{1}{n} = \infty$ . Supposons que*

$$T(\lambda, n) = \tilde{T}(\lambda, n), \quad \forall n \in \mathcal{L}.$$

*Supposons également que*

$$L(\lambda, k) = \tilde{L}(\lambda, k), \tag{1.7.12}$$

*pour un nombre fini mais assez grand (nombre qui dépend des métriques  $\sigma$  et  $\tilde{\sigma}$ ) d'indices  $k \in \mathbb{N}$ . Alors il existe une constante  $\alpha \in \mathbb{R}$  telle que*

$$\tilde{a}(x) = a(x + \alpha).$$

*Par conséquent, les deux VAHSS  $(\Sigma, \sigma)$  et  $(\Sigma, \tilde{\sigma})$  coïncident à isométrie près.*

*Démonstration.* D'après la Proposition 1.7.1, on sait qu'il existe une fonction rationnelle  $g(z)$  telle que

$$L(\lambda, z) = g(z)\tilde{L}(\lambda, z).$$

De (1.7.12), on déduit que  $g(z) = 1$  pour tout  $z \in \mathbb{C}$  et on achève donc la preuve de la Proposition en utilisant [DN11], Theorem 1.1.  $\square$



# Problème inverse dans des trous noirs

Dans ce chapitre reprenant l'article [Gob15], on considère des champs de Dirac massifs et chargés se propageant dans la région extérieure d'un trou noir de type Reissner-Nordström-de Sitter. On montre alors que les paramètres d'un tel trou noir sont déterminés de façon unique par la connaissance partielle de la matrice de diffusion correspondante  $S(\lambda)$  à une énergie fixée  $\lambda$ . Plus précisément, on considère les matrices de diffusion partielles  $S(\lambda, n)$ , où  $\lambda \in \mathbb{R}$  est l'énergie et  $n \in \mathbb{N}^*$  désigne le moment angulaire, comme étant les restrictions de la matrice de diffusion totale sur une base bien choisie d'harmoniques sphériques. On prouve alors que la connaissance des matrices de diffusion partielles  $S(\lambda, n)$ , pour tout  $n \in \mathcal{L}$ , où  $\mathcal{L}$  est un sous-ensemble de  $\mathbb{N}^*$  satisfaisant la condition de Müntz  $\sum_{n \in \mathcal{L}} \frac{1}{n} = +\infty$ , nous permet de retrouver la masse et la charge du trou noir ainsi que la constante cosmologique de l'univers. L'argument principal de la preuve consiste à complexifier le moment angulaire  $n$  et à étudier les propriétés d'analyticité des données de diffusion - qui n'ont plus de sens physique - en la variable complexe  $z$ .

## 2.1 Introduction et résultat principal

La Relativité Générale a été introduite par Albert Einstein en 1915 et est l'une des plus belles et des plus importantes théories du vingtième siècle. Cette théorie prédit l'existence des trous noirs qui font l'objet de ce chapitre. Bien qu'ils soient des objets difficiles à étudier d'un point de vue astrophysique, ils sont en réalité assez simples à étudier en théorie. En effet, ils dépendent seulement de quelques paramètres (voir par exemple [Heu96] et [LR10] pour des trous noirs à symétrie sphérique et [Wal84] pour des trous noirs en rotation) : leur masse, leur charge électrique, leur moment angulaire et potentiellement la constante cosmologique de l'univers. La théorie de la diffusion directe et inverse dans les trous noirs est un sujet de premier intérêt. La diffusion directe pour des trous noirs de type Schwarzschild (statiques, non chargés et à symétrie sphérique), de type Reissner-Nordström-(de Sitter) (statiques, chargés et à symétrie sphérique) et de type Kerr (non chargés et en rotation) a été étudiée par exemple par Bachelot, Dimock, Kay, Nicolas, Jin, Melnik et Häfner dans [Bac91, Bac94, Dim85, DK86, Nic95, Jin98, Mel00, Mel03, Häf03, HN04]. Entre autres raisons, ces études ont été motivées par la découverte de phénomènes inattendus tels que l'effet Hawking et le phénomène de superradiance. On renvoie par exemple aux travaux de Bachelot [Bac97, Bac99], Häfner [Häf09] et Melnyk [Mel04] pour une application des résultats de diffusion à l'effet Hawking. Concernant la diffusion inverse dans des trous noirs de type Reissner-Nordström-(de Sitter), notre étude est dans lignée des articles de Daudé et Nicoleau [DN08, DN09, DN10, DN11].

Ce travail est donc une suite des contributions [DN08, DN09, DN10, DN11] et traite des trous noirs de type Reissner-Nordström-de Sitter. Ces trous noirs sont des solutions électriquement chargées et à symétrie sphérique des équations de Einstein-Maxwell qui sont complètement caractérisées par trois paramètres : la masse  $M > 0$  et la charge électrique  $Q \in \mathbb{R}$  du trou noir ainsi que la constante cosmologique de l'univers  $\Lambda > 0$ . L'objet de ce chapitre est l'étude d'un problème de diffusion inverse dans un trou noir de type RN-dS dont les paramètres sont les inconnues. En réalité, nous allons montrer au cours de la preuve que nous sommes capables de retrouver plus que ces paramètres.

Dans l'étude de la théorie de la diffusion dans un trou noir nous devons composer avec deux *régions asymptotiques*. En effet, on adopte le point de vue d'un observateur situé loin de l'horizon cosmologique et de l'horizon des événements et statique par rapport à ces horizons. Il est connu qu'un tel observateur perçoit les horizons comme des régions asymptotiques. Ainsi, nous devons voir les trous noirs de type RN-dS comme des ensembles à symétrie sphérique avec deux bouts ayant une géométrie asymptotiquement hyperbolique (l'horizon cosmologique et l'horizon des événements). La question que nous

posons est alors la suivante :

*Existe-t-il un moyen de caractériser de façon unique les paramètres du trou noir par une expérience de diffusion inverse du point de vue de l'observateur statique ?*

Pour reformuler notre problématique on introduit les opérateurs d'ondes associés à des champs de Dirac massifs et chargés évoluant dans la région extérieure du trou noir. On désigne par  $W_{(-\infty)}^{\pm}$  les opérateurs d'ondes correspondant à la partie des champs de Dirac massifs et chargés qui diffusent vers l'horizon des événements et par  $W_{(+\infty)}^{\pm}$  les opérateurs d'ondes correspondant à la partie de ces champs qui diffusent vers l'horizon cosmologique. Grâce à [Dau10, Mel04] on sait que les opérateurs d'ondes globaux qui sont définis par

$$W^{\pm} = W_{(-\infty)}^{\pm} \oplus W_{(+\infty)}^{\pm}, \quad (2.1.1)$$

existent et sont asymptotiquement complets sur l'espace de Hilbert des données de diffusion. Ceci permet de définir l'opérateur de diffusion global  $S$  par la formule usuelle

$$S = (W^+)^* W^-.$$

L'opérateur de diffusion est l'objet principal de ce chapitre. Il contient toutes les informations de diffusion pour un observateur vivant loin des horizons d'un trou noir de type RN-dS. On définit alors la matrice de diffusion  $S(\lambda)$  comme étant la restriction de l'opérateur de diffusion  $S$  à un niveau d'énergie  $\lambda \in \mathbb{R}$ . Grâce à cette définition, on peut reformuler notre question principale :

*Est-ce que la connaissance de  $S(\lambda)$  à une énergie  $\lambda \in \mathbb{R}$  fixée est une information suffisante pour caractériser de façon unique les paramètres du trou noir ?*

Le but de ce chapitre est donc de montrer que les paramètres  $M$ ,  $Q$  et  $\Lambda$  sont caractérisés de façon unique par la connaissance de la matrice de diffusion à une énergie fixée et plus précisément, par la connaissance d'un des coefficients de réflexion à une énergie fixée. Dans les faits, on récupère plus que les paramètres du trou noir puisque l'on montre l'unicité (à un certain difféomorphisme près) de certaines fonctions scalaires apparaissant dans l'équation de Dirac. Notons enfin que, contrairement à [DN10], on n'a pas besoin de la connaissance de la matrice de diffusion sur un intervalle d'énergie mais seulement à *une énergie fixée* pour retrouver la métrique du trou noir. Notre résultat est ainsi une adaptation au cas des champs de Dirac massifs et chargés du résultat similaire donné dans [DN11] et rappelé dans le Théorème 1.1.1 pour des champs de Dirac non massifs et non chargés. Nous verrons que l'ajout, physiquement intéressant, d'un terme de masse rend

plus difficile la définition de la matrice de diffusion et ajoute des difficultés techniques dans la preuve de notre Théorème.

### 2.1.1 Trous noirs de type Reissner-Nordström-de Sitter

Dans les coordonnées de Schwarzschild, la région extérieure d'un trou noir de type RN-dS est décrite par la variété de dimension quatre

$$\mathcal{M} = \mathbb{R}_t \times ]r_-, r_+[ \times \mathbb{S}_\omega^2,$$

équipée de la métrique lorentzienne

$$g = g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu = F(r) dt^2 - F(r)^{-1} dr^2 - r^2 d\omega^2, \quad (2.1.2)$$

où

$$F(r) = 1 - \frac{2M}{r} + \frac{Q^2}{r^2} - \frac{\Lambda r^2}{3}, \quad (2.1.3)$$

et  $d\omega^2 = d\theta^2 + \sin(\theta)^2 d\varphi^2$  est la métrique euclidienne sur la sphère  $\mathbb{S}^2$ . Les trous noirs de type Reissner-Nordström-de Sitter (RN-dS) sont des solutions électriquement chargées et à symétrie sphérique des équations d'Einstein

$$G_{\mu\nu} = 8\pi T_{\mu\nu},$$

où  $G_{\mu\nu}$  est le tenseur d'Einstein,  $T_{\mu\nu}$  est le tenseur énergie-impulsion,

$$T_{\mu\nu} = \frac{1}{4\pi} (F_{\mu\rho} F_\nu^\rho - \frac{1}{4} g_{\mu\nu} F_{\rho\sigma} F^{\rho\sigma}),$$

où  $F_{\mu\nu}$  est la 2-forme électromagnétique, solution des équations de Maxwell  $\nabla^\mu F_{\nu\rho} = 0$ ,  $\nabla_{[\mu} F_{\nu\rho]} = 0$  et donnée ici en termes du potentiel électromagnétique par  $F_{\mu\nu} = \nabla_{[\mu} A_{\nu]}$ ,  $A_\nu dx^\nu = -\frac{Q}{r} dt$ . Les quantités  $M$  et  $Q$  sont interprétées comme étant la masse et la charge du trou noir de type RN-dS alors que  $\Lambda > 0$  désigne la constante cosmologique de l'univers. Ces quantités seront les inconnues que l'on cherchera à déterminer lors de notre problème inverse.

Étudions les singularités de la métrique  $g$ . Pour commencer,  $F$  est singulière au point  $\{r = 0\}$ . Il s'agit d'une singularité de courbure ce qui veut dire que la contraction du tenseur de Riemann explose lorsque  $r \rightarrow 0$ . Ensuite, les sphères dont les rayons sont les racines de  $F$  sont également des singularités de la métrique  $g$  (le coefficient  $F^{-1}$  de la métrique  $g$  explose dans ce cas). On suppose ici que la fonction  $F(r)$  possède trois

racines positives simples  $0 < r_c < r_- < r_+$  et une négative  $r_n < 0$ . Ceci est toujours vrai si l'on suppose, par exemple, que  $Q^2 < \frac{9}{8}M^2$  et que  $\Lambda M^2$  est assez petit (voir [Lak79]). L'hypersurface  $\{r = r_c\}$  est appelée l'horizon de Cauchy alors que les hypersurfaces  $\{r = r_-\}$  et  $\{r = r_+\}$  désignent, respectivement, l'horizon des événements et l'horizon cosmologique. On considérera uniquement la région extérieure du trou noir, i.e. la région  $\{r_- < r < r_+\}$  se situant entre l'horizon des événements et l'horizon cosmologique (la fonction  $F$  est positive dans cette région). En réalité, l'horizon des événements et l'horizon cosmologique qui apparaissent comme étant des singularités de la métrique (2.1.2) sont dues à notre mauvais choix de système de coordonnées. En utilisant des coordonnées appropriées, ces horizons peuvent être vues comme des hypersurfaces régulières qui peuvent être traversés en un sens mais requiert une vitesse plus grande que la vitesse de la lumière pour être traversées dans l'autre sens.

Comme mentionné précédemment, le point de vue implicitement adopté dans ce travail est celui d'observateurs statiques situés loin de l'horizon des événements et de l'horizon cosmologique du trou noir. On pense typiquement à un télescope situé sur Terre dirigé vers le trou noir où vers l'horizon cosmologique. On voit ces observateurs comme vivant sur les lignes d'univers  $\{r = r_0\}$  avec  $r_- \ll r_0 \ll r_+$ . La variable  $t$  des coordonnées de Schwarzschild correspond à leur temps propre. Du point de vue de nos observateurs, il est important de comprendre que l'horizon des événements et l'horizon cosmologique sont les *frontières* du monde observable. Ceci peut être plus facilement compris en notant que ces horizons ne peuvent en réalité pas être traversés en un temps fini  $t$  par des géodésiques radiales entrantes et sortantes qui sont les trajectoires suivies par les rayons lumineux se déplaçant radialement par rapport au trou noir et à l'horizon cosmologique. Ces deux horizons sont ainsi perçus comme des *régions asymptotiques* par nos observateurs statiques. En résumé, on peut moralement se représenter un trou noir par le schéma suivant :

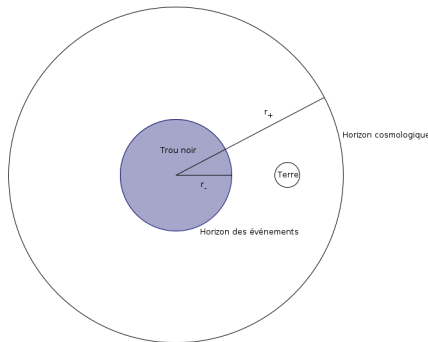


FIGURE 2.1 – Trou noir



Au lieu de travailler avec la variable radiale  $r$ , on décrit la région extérieure du trou noir en utilisant la variable radiale de Regge-Wheeler (RW). La variable de RW,  $x$ , est définie implicitement par

$$\frac{dx}{dr} = F^{-1}(r),$$

ou explicitement par

$$x = \frac{1}{2\kappa_n} \ln(r - r_n) + \frac{1}{2\kappa_c} \ln(r - r_c) + \frac{1}{2\kappa_-} \ln(r - r_-) + \frac{1}{2\kappa_+} \ln(r_+ - r) + C, \quad (2.1.4)$$

où  $C$  est une constante d'intégration et les quantités  $\kappa_j$ ,  $j = n, c, -, +$  sont définies par

$$\kappa_n = \frac{1}{2}F'(r_n), \quad \kappa_c = \frac{1}{2}F'(r_c), \quad \kappa_- = \frac{1}{2}F'(r_-), \quad \kappa_+ = \frac{1}{2}F'(r_+). \quad (2.1.5)$$

Les constantes  $\kappa_- > 0$  et  $\kappa_+ < 0$  sont appelées les gravités de surfaces respectivement de l'horizon des événements et de l'horizon cosmologique. On remarque sur (2.1.4) que les horizons  $\{r = r_{\pm}\}$  sont envoyés aux infinis  $\{x = \pm\infty\}$  par la variable de RW,  $x$ . De plus, on peut montrer que, dans ce nouveau système de coordonnées, les géodésiques radiales deviennent des lignes droites  $\{x = \pm t\}$  dans le plan  $t - x$ . Ainsi, la variable radiale de RW traduit en pratique le fait que l'horizon des événements et l'horizon cosmologique soient perçus comme des *régions asymptotiques* par nos observateurs.

Enfin, on insiste sur la présence d'une constante d'intégration  $C$  dans la définition de  $x$ . L'importance d'une telle constante est expliquée dans [DN13], Section 4.1.5, Proposition 4.12. Dans cette Proposition, il est montré qu'il y a une dépendance de la matrice de diffusion par rapport au choix de la constante d'intégration  $C$ . Puisque la région extérieure d'un trou noir de type RN-dS peut être décrite de façon unique par n'importe quel choix de la variable de Regge-Wheeler  $x$ , on devrait donner toutes les formes possibles des matrices de diffusion dans notre résultat principal. Cependant, dans un souci de simplicité, on prend  $C = 0$  dans notre étude (le cas  $C \neq 0$  peut être traité de la même façon en utilisant la dépendance explicite en  $C$  de la matrice de diffusion donnée dans [DN13]).

### 2.1.2 Matrice de diffusion et présentation du résultat

Comme dans [DN10], on considère des champs de Dirac massifs et chargés se propageant dans la région extérieure d'un trou noir de type RN-dS. La théorie de la diffusion pour de tels champs a fait l'objet des articles [Dau10, Mel04]. Nous allons utiliser la forme de l'équation de Dirac obtenue dans ces travaux comme point de départ de notre étude. On

## 2.1. Introduction et résultat principal

---

renvoie à la Section 2.2 pour plus de détails.

Les champs de Dirac massifs et chargés considérés sont représentés par des spineurs à quatre composantes  $\psi$  appartenant à l'espace de Hilbert

$$L^2(\mathbb{R} \times \mathbb{S}^2; \mathbb{C}^4),$$

qui satisfont l'équation d'évolution

$$i\partial_t \psi = (\Gamma^1 D_x + a(x)\mathbb{D}_{\mathbb{S}^2} + b(x)\Gamma^0 + c(x))\psi. \quad (2.1.6)$$

Le symbole  $D_x$  désigne  $-i\partial_x$  alors que  $\mathbb{D}_{\mathbb{S}^2}$  désigne l'opérateur de Dirac sur  $\mathbb{S}^2$  qui, en coordonnées sphériques, prend la forme,

$$\mathbb{D}_{\mathbb{S}^2} = -i\Gamma^2 \left( \partial_\theta + \frac{\cot(\theta)}{2} \right) - \frac{i}{\sin(\theta)} \Gamma^3 \partial_\varphi. \quad (2.1.7)$$

Les potentiels  $a$ ,  $b$  et  $c$  sont des fonctions scalaires lisses données en termes de la métrique (2.1.2) par

$$a(x) = \frac{\sqrt{F(r)}}{r}, \quad b(x) = m\sqrt{F(r)} \quad \text{et} \quad c(x) = \frac{qQ}{r}, \quad (2.1.8)$$

où  $m$  et  $q$  désignent respectivement la masse et la charge des champs de Dirac. On insiste sur le fait que les quantités  $m$  et  $q$  sont connues. En effet, les quantités que l'on cherche à déterminer lors de notre problème inverse et qui sont donc a priori inconnues sont  $M$ ,  $Q$  et  $\Lambda$ . Enfin, les matrices  $\Gamma^1$ ,  $\Gamma^2$ ,  $\Gamma^3$  et  $\Gamma^0$  apparaissant dans (2.1.6) et (2.1.7) sont les matrices de Dirac  $4 \times 4$  qui vérifient des relations d'anti-commutativité (voir (2.2.3)). L'Équation (2.1.6) est à symétrie sphérique et peut par conséquent être séparée en un système d'équations différentielles ordinaires. Nous allons montrer que la diffusion stationnaire est gouvernée par une famille dénombrable d'équations de Dirac stationnaires unidimensionnelles qui prennent la forme :

$$\left( \Gamma^1 D_x - \left( l + \frac{1}{2} \right) a(x)\Gamma^2 + b(x)\Gamma^0 + c(x) \right) \psi(x, \lambda, l) = \lambda \psi(x, \lambda, l), \quad (2.1.9)$$

et qui sont les restrictions de l'équation complète sur une base d'harmoniques sphériques spinorielles à poids bien choisies (indexée par  $l = \frac{1}{2}, \frac{3}{2}, \dots$ ) et invariantes pour l'équation complète. Ici  $\lambda$  désigne l'énergie des ondes considérées et  $n := l + \frac{1}{2} \in \mathbb{N}^*$  est appelé le moment angulaire.

Concernant les potentiels, on sait d'après [DN10] que  $a(x)$ ,  $b(x)$ ,  $a'(x)$ ,  $b'(x) = O(e^{\kappa \pm x})$ ,  $c(x) = O(1)$  et  $c'(x) = O(e^{2\kappa \pm x})$  lorsque  $x \rightarrow \pm\infty$  (voir le Lemme 2.2.1 pour des asymp-

totiques précises). Faisons quelques remarques à propos de ces asymptotiques. D'un côté, bien que les champs de Dirac soient massifs, ils se propagent asymptotiquement comme dans le cas sans masse puisque  $b(x) \rightarrow 0$  lorsque  $x \rightarrow \pm\infty$ . Ceci est dû aux effets de l'intense gravitation au voisinage de l'horizon des événements et de l'horizon cosmologique du trou noir. D'un autre côté, il subsiste dans les asymptotiques une influence de l'interaction entre les charges électriques  $q$  et  $Q$  puisque le potentiel  $c(x)$  satisfait  $c(x) \rightarrow c_{\pm}$  quand  $x \rightarrow \pm\infty$ . En réalité, nous allons montrer plus tard que l'on peut se ramener au cas usuel d'une équation de Dirac unidimensionnelle avec un potentiel  $L^1$  à l'aide d'une transformation unitaire.

Comme nous l'avons déjà dit dans l'introduction, l'existence et la complétude asymptotique des opérateurs d'ondes globaux associés à (2.1.9) définis pour tout moment angulaire  $n \in \mathbb{N}^*$  par

$$W_n^{\pm} = W_{n,(-\infty)}^{\pm} \oplus W_{n,(+\infty)}^{\pm},$$

prouvées dans [Dau10, Mel04], permettent de définir l'opérateur de diffusion  $S(n)$  sur chaque harmonique sphérique par la formule usuelle

$$S(n) = (W_n^+)^* W_n^-.$$

De plus, cet opérateur peut être décomposé sous la forme

$$S(n) = \begin{pmatrix} T_L(n) & R(n) \\ L(n) & T_R(n) \end{pmatrix},$$

où les deux premiers termes  $T_R(n)$  et  $T_L(n)$  sont des opérateurs de transmission alors que les deux derniers  $L(n)$  et  $R(n)$  sont des opérateurs de réflexion.

Comme nous le verrons dans la Section 2.3.1, on peut obtenir une représentation stationnaire de l'opérateur de diffusion  $S(n)$  en une somme directe de matrices de diffusion partielles  $S(\lambda, n)$ . Puisque l'on sépare l'équation de Dirac complète en une famille dénombrable d'équations de Dirac stationnaires unidimensionnelles qui sont les restrictions de l'équation complète sur une base d'harmoniques sphériques bien choisie, on peut définir la matrice de diffusion globale par

$$S(\lambda) = \bigoplus_{n \in \mathbb{N}^*} S(\lambda, n),$$

où

$$S(\lambda, n) = \begin{pmatrix} T_L(\lambda, n) & R(\lambda, n) \\ L(\lambda, n) & T_R(\lambda, n) \end{pmatrix}.$$

## 2.1. Introduction et résultat principal

---

De plus, il est important d'avoir à l'esprit que la connaissance de la matrice de diffusion  $S(\lambda)$  est équivalente à la connaissance des matrices de diffusion partielles  $S(\lambda, n)$  pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$ .

Moralement, le résultat principal de ce chapitre énonce que la connaissance de la matrice de diffusion  $S(\lambda)$  à une énergie fixée  $\lambda \in \mathbb{R}$  détermine de façon unique la masse  $M$  et la charge  $Q$  du trou noir ainsi que la constante cosmologique de l'univers  $\Lambda$ . Plus précisément, il suffit de connaître un des opérateurs de réflexion partiels  $L(\lambda, n)$ ,  $R(\lambda, n)$  à une énergie fixée  $\lambda$  sur un sous-ensemble  $\mathcal{L} \subset \mathbb{N}^*$  satisfaisant la condition de Müntz  $\sum_{n \in \mathcal{L}} \frac{1}{n} = \infty$  pour obtenir l'unicité des paramètres  $M$ ,  $Q$  et  $\Lambda$ . Le résultat principal de ce chapitre est ainsi le suivant :

**Théoreme 2.1.1.** *Soient  $(M, Q, \Lambda)$  et  $(\tilde{M}, \tilde{Q}, \tilde{\Lambda})$  les paramètres de deux trous noirs de type RN-dS. On désigne par  $S(\lambda, n)$  et  $\tilde{S}(\lambda, n)$  les matrices de diffusion partielles correspondantes à une énergie fixée  $\lambda \in \mathbb{R}$ . On considère un sous-ensemble  $\mathcal{L}$  de  $\mathbb{N}^*$  satisfaisant la condition de Müntz  $\sum_{n \in \mathcal{L}} \frac{1}{n} = \infty$  et on suppose qu'à une énergie fixée  $\lambda \in \mathbb{R}$  l'une des assertions suivantes est satisfaite,*

$$(i) \quad L(\lambda, n) = \tilde{L}(\lambda, n), \quad \forall n \in \mathcal{L},$$

$$(ii) \quad R(\lambda, n) = \tilde{R}(\lambda, n), \quad \forall n \in \mathcal{L}.$$

Alors, il existe un difféomorphisme  $\psi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  tel que

$$\frac{c(\psi(x)) - \lambda}{a(\psi(x))} = \frac{\tilde{c}(x) - \lambda}{\tilde{a}(x)} \quad \text{et} \quad \frac{b(\psi(x))}{a(\psi(x))} = \frac{\tilde{b}(x)}{\tilde{a}(x)}.$$

Par conséquent, on obtient

$$M = \tilde{M}, \quad Q = \tilde{Q}, \quad \Lambda = \tilde{\Lambda}.$$

**Remarque 2.1.2.** 1. La différence entre ce modèle et celui de la Section 1.5 réside dans l'ajout des termes de masse et de charge. Le présence de ces termes  $a$ , comme nous le verrons dans les différentes Remarques de la Section 2.1.3, de nombreuses répercussions techniques dans notre preuve. En effet, bien que l'idée de notre preuve soit très proche de celle donnée dans [DN11] nous devons composer avec plusieurs difficultés dues à la masse et la charge.

2. La question de déterminer les paramètres  $M$ ,  $Q$  et  $\Lambda$  à partir du coefficient de transmission à une énergie fixée est toujours ouverte.

3. Il est suffisant pour prouver notre résultat d'unicité de supposer que les coefficients de réflexion sont connus à une erreur  $O(e^{-2nB})$ , pour un  $B \in ]0, \min(A, \tilde{A})[$ , près. En effet, on peut utiliser l'idée de [DGN13], qui a fait l'objet de notre premier chapitre, dans lequel on a prouvé un résultat de diffusion inverse local à énergie fixée pour des variétés asymptotiquement hyperboliques et à symétrie sphérique.
4. Il est également suffisant pour prouver notre résultat de supposer que les coefficients de réflexion sont connus à une matrice unitaire constante près. En effet, dans la preuve du résultat d'unicité sous la connaissance du coefficient de réflexion  $R$  (voir la Section 2.6.3), on se ramène à ce cas et on conclut à l'aide d'une légère modification technique.
5. On insiste sur le fait que, dans la preuve de notre Théorème, on commence par obtenir, sans utiliser la forme explicite des potentiels, les égalités

$$\frac{c - \lambda}{a}(h(X)) = \frac{\tilde{c} - \lambda}{\tilde{a}}(\tilde{h}(X)), \quad \frac{b}{a}(h(X)) = \frac{\tilde{b}}{\tilde{a}}(\tilde{h}(X))$$

(voir la Section suivante pour la définition de la variable de Liouville  $X$  et des difféomorphismes  $h$  et  $\tilde{h}$ ). Alors, grâce à la définition explicite des potentiels, on obtient l'égalité des paramètres. On observe également que, si l'on suppose l'égalité des matrices de diffusion partielles à deux énergies fixées (potentiellement pour des ensembles de Müntz différents), on peut conclure à l'unicité des potentiels  $a$ ,  $b$  et  $c$  à un certain difféomorphisme près sans utiliser leur définitions explicites.

6. Contrairement à [DN11], le cas de l'énergie nulle n'est pas une obstruction pour notre problème inverse si on suppose que la charge électrique des champs de Dirac n'est pas nulle.
7. Contrairement au cas sans masse et sans charge, on détermine exactement la charge et non pas le carré de la charge. Ceci est dû à la présence du potentiel de type électrique  $c$ .

### 2.1.3 Aperçu de la preuve

La preuve du Théorème 2.1.1 est constituée de trois étapes que nous allons décrire ici.

La première étape de la preuve consiste à obtenir une représentation stationnaire des matrices de diffusion partielles en suivant l'analyse de [AKvdM00]. Pour ce faire, on commence par se débarrasser du potentiel à longue portée  $c$  dans l'expression des opérateurs de Dirac stationnaires unidimensionnels (2.1.7) dans le but d'obtenir un

nouvel opérateur de Dirac avec un potentiel à courte portée. Ce nouvel opérateur entre alors dans le cadre usuel de la théorie de diffusion inverse pour les opérateurs de Dirac unidimensionnels étudiés dans [AKvdM00]. On conjugue donc l'opérateur autoadjoint unidimensionnel

$$H = \Gamma^1 D_x - na(x)\Gamma^2 + b(x)\Gamma^0 + c(x),$$

par un opérateur unitaire bien choisi  $U$  défini par

$$U = e^{-i\Gamma^1 C^-(x)}, \quad C^-(x) = \int_{-\infty}^x (c(s) - c_-) ds + c_- x.$$

On considère ainsi,

$$A = U^* H U,$$

qui peut être écrit comme

$$A = \Gamma^1 D_x + W(x),$$

où

$$W(x) = e^{i\Gamma^1 C^-(x)} (na(x)\Gamma^2 + b(x)\Gamma^0) e^{-i\Gamma^1 C^-(x)}.$$

Grâce aux asymptotiques des potentiels, on voit que  $W$  est exponentiellement décroissant près des horizons et appartient donc à  $L^1(\mathbb{R})$ . Ainsi, ce nouvel opérateur  $A$  entre dans le cadre de l'article [AKvdM00] et on peut donc définir de façon simple les données de diffusion correspondantes. En suivant [AKvdM00], on obtient que les matrices de diffusion partielles  $\hat{S}(\lambda, n)$  sont définies en termes de solutions stationnaires ayant des asymptotiques prescrites à l'infini, appelées les fonctions de Jost. On introduit donc les matrices  $4 \times 4$ ,  $\hat{F}_L$  et  $\hat{F}_R$  solutions de l'équation

$$A\psi(x, \lambda, n) = \lambda\psi(x, \lambda, n), \tag{2.1.10}$$

et ayant les asymptotiques

$$\hat{F}_L(x, \lambda, n) = e^{i\Gamma^1 \lambda x} (I_4 + o(1)), \quad x \rightarrow +\infty, \tag{2.1.11}$$

$$\hat{F}_R(x, \lambda, n) = e^{i\Gamma^1 \lambda x} (I_4 + o(1)), \quad x \rightarrow -\infty, \tag{2.1.12}$$

où  $I_4$  désigne la matrice identité. Les solutions de Jost forment un système fondamental de solutions de (2.1.10). Par conséquent, il existe une matrice  $4 \times 4$ ,  $\hat{A}_L(\lambda, n)$ , dépendant uniquement de l'énergie et du moment angulaire  $n$  telle que les solutions de Jost soient

reliées par

$$\hat{F}_L(x, \lambda, n) = \hat{F}_R(x, \lambda, n) \hat{A}_L(\lambda, n). \quad (2.1.13)$$

De façon similaire, on définit la matrice  $4 \times 4$ ,  $\hat{A}_R(\lambda, n)$ , par

$$\hat{F}_L(x, \lambda, n) \hat{A}_R(\lambda, n) = \hat{F}_R(x, \lambda, n). \quad (2.1.14)$$

Les coefficients des matrices  $\hat{A}_L$  et  $\hat{A}_R$  contiennent toutes les informations de diffusion de l'Équation (2.1.10). En particulier, en utilisant les notations

$$\hat{A}_L(\lambda, n) = \begin{pmatrix} \hat{A}_{L1}(\lambda, n) & \hat{A}_{L2}(\lambda, n) \\ \hat{A}_{L3}(\lambda, n) & \hat{A}_{L4}(\lambda, n) \end{pmatrix}, \quad \hat{A}_R(\lambda, n) = \begin{pmatrix} \hat{A}_{R1}(\lambda, n) & \hat{A}_{R2}(\lambda, n) \\ \hat{A}_{R3}(\lambda, n) & \hat{A}_{R4}(\lambda, n) \end{pmatrix}, \quad (2.1.15)$$

où les blocs  $\hat{A}_{Lj}$  et  $\hat{A}_{Rj}$  sont des matrices  $2 \times 2$ , les matrices de diffusion partielles  $\hat{S}(\lambda, n)$  sont alors définies par

$$\hat{S}(\lambda, n) = \begin{pmatrix} \hat{T}_L(\lambda, n) & \hat{R}(\lambda, n) \\ \hat{L}(\lambda, n) & \hat{T}_R(\lambda, n) \end{pmatrix}, \quad (2.1.16)$$

où (voir [AKvdM00], eqs. (3.6)-(3.7))

$$\hat{T}_L(\lambda, n) = \hat{A}_{L1}(\lambda, n)^{-1}, \quad \hat{T}_R(\lambda, n) = \hat{A}_{R4}(\lambda, n)^{-1}, \quad (2.1.17)$$

$$\hat{L}(\lambda, n) = \hat{A}_{L3}(\lambda, n) \hat{A}_{L1}(\lambda, n)^{-1} = -\hat{A}_{R4}(\lambda, n)^{-1} \hat{A}_{R3}(\lambda, n) \quad (2.1.18)$$

et

$$\hat{R}(\lambda, n) = -\hat{A}_{L1}(\lambda, n)^{-1} \hat{A}_{L2}(\lambda, n) = \hat{A}_{R2}(\lambda, n) \hat{A}_{R4}(\lambda, n)^{-1}. \quad (2.1.19)$$

**Remarque 2.1.3.** *On insiste sur le fait que les champs de Dirac étudiés dans ce chapitre sont massifs et électriquement chargés. Ceci entraîne des complications techniques par rapport au cas des champs de Dirac étudiés dans [DN11]. Pour commencer, les données de diffusion  $\hat{A}_{Lj}(\lambda, n)$ , dans le cas sans masse et sans charge, sont des nombres complexes et non pas des matrices  $2 \times 2$ . De même, les fonctions de Jost sont des matrices  $2 \times 2$  et non pas des matrices  $4 \times 4$ . Ceci est dû au fait que l'ajout du terme de masse nous empêche d'utiliser les spineurs à deux composantes pour décrire les champs de Dirac. Cependant, si l'on prend  $m = q = 0$  dans notre étude, on peut découpler les quatre composantes de nos spineurs de Dirac en deux spineurs de Dirac à deux composantes satisfaisant l'équation de Dirac sans masse de [DN11], Equation (1.7). Nous allons ainsi retrouver les résultats de [DN11] comme cas particuliers de notre résultat.*

La seconde étape de la preuve est la plus importante. En effet, comme dans [DN11],

l'idée principale de ce chapitre est de complexifier le moment angulaire  $n = l + \frac{1}{2}$  et d'étudier les propriétés d'analyticité des données de diffusion correspondantes (qui n'ont pas de sens physique) par rapport à la variable  $z = n \in \mathbb{C}$ . L'idée générale de considérer un moment angulaire complexe provient d'un travail de Regge [Reg59] dans lequel l'auteur analyse la matrice de diffusion d'opérateurs de Schrödinger dans  $\mathbb{R}^3$  ayant des potentiels à symétrie sphérique (voir aussi [New02, CM69] pour une description détaillée de cette approche). Pour pouvoir appliquer des résultats d'unicité, valident pour certaines classes de fonctions analytiques, aux données de diffusion, on a besoin de bonnes asymptotiques des fonctions de Jost lorsque le moment angulaire  $z$  devient grand.

**Remarque 2.1.4.** *Nous n'avons en réalité pas besoin des asymptotiques pour  $z$  grand dans tout le plan complexe. En effet, il est suffisant pour prouver le Théorème 2.1.1 d'avoir de bonnes estimations sur l'axe réel et l'axe imaginaire pur. Cependant, il n'est pas beaucoup plus dur d'obtenir des asymptotiques sur tout  $\mathbb{C}$ . On espère que ces asymptotiques pourront être utiles dans des travaux futurs.*

**Remarque 2.1.5.** *La présence du terme de masse a une conséquence fondamentale dans l'étude des asymptotiques des composantes des matrices de Jost. Plus précisément, il est montré dans le cas sans masse (voir [DN11]) que les composantes des matrices de Jost possèdent un développement en série en la variable  $z$  et vérifient des EDOs découplées. À partir de ces EDOs, il est facile de montrer que ce sont des perturbations de fonctions de Bessel modifiées dont on connaît les asymptotiques. Dans le cas massif et chargé que nous étudions ici, les composantes des matrices de Jost satisfont des systèmes d'EDOs ce qui rend l'analyse plus complexe. Néanmoins, en utilisant un argument perturbatif et de bonnes estimations du noyau de Green, on peut montrer que les composantes des matrices de Jost sont encore des perturbations des fonctions de Bessel modifiées à partir desquelles on obtient les asymptotiques recherchées.*

*La présence du terme de masse a également des conséquences sur les symétries des données de diffusion. En effet, comme cela est montré dans [DN11] dans le cas sans masse (voir Lemma 3.1 et Lemma 3.3), les composantes des matrices de Faddeev (voir la Section 2.3 pour la définition) sont paires ou impaires en la variable  $z$  et il y a une relation de conjugaison entre la première et la quatrième composantes, et entre la seconde et la troisième composantes. De telles propriétés sont également vraies pour les coefficients de la matrice des données de diffusion. Ces symétries ne sont plus vraies dans le cas des champs de Dirac massifs et chargés. Par conséquent, nous allons régulièrement devoir recourir à des stratégies différentes pour prouver les résultats correspondants à ceux de [DN11]. Cependant, puisque pour  $z$  grand, le terme principal du potentiel est  $za(x)$ , la*



masse n'a pas d'influence dans ce régime. On s'attend donc à retrouver les symétries données dans [DN11] dans les asymptotiques des données de diffusion lorsque  $|z| \rightarrow \infty$ .

Comme énoncé dans la Remarque précédente, la première étape pour obtenir les asymptotiques consiste à montrer que les composantes des fonctions de Jost sont des perturbations de fonctions de Bessel modifiées. Pour ce faire, il est pratique d'introduire une nouvelle variable radiale  $X$  définie par une transformation de Liouville

$$X = g(x) = \int_{-\infty}^x a(s) ds. \quad (2.1.20)$$

On note que  $g$  est un difféomorphisme de  $\mathbb{R}$  sur  $]0, A[$  où  $A = \int_{\mathbb{R}} a(s) ds$ . On désigne alors par  $h$  l'inverse de cette transformation. La raison pour laquelle on introduit une telle variable réside dans le fait que l'on peut montrer que les composantes  $F_{Li,j}(h(X), \lambda, z)$  et  $F_{Ri,j}(h(X), \lambda, z)$  des matrices de Jost satisfont dans cette variable des systèmes d'équations différentielles du second ordre de la forme

$$f''(X) + q(X)f(X) = z^2 f(X) + r(X), \quad X \in ]0, A[. \quad (2.1.21)$$

Dans cette équation, le potentiel  $q(X)$  possède des singularités quadratiques aux bords 0 et  $A$  alors que  $r(X)$  est le terme de couplage entre les composantes des fonctions de Jost et est borné aux bords. On note que le moment angulaire (ou la constante de couplage)  $z = l + \frac{1}{2}$  est devenu le paramètre spectral de la partie découplée de cette nouvelle équation. En utilisant un argument perturbatif, on peut alors montrer que les composantes des fonctions de Jost sont des perturbations de fonctions de Bessel modifiées bien choisies et ainsi obtenir leur asymptotiques. Finalement, on obtient des estimations sur les composantes des fonctions de Jost du type  $|F_{Li,j}/Ri,j(X, \lambda, z)| \leq C e^{|\operatorname{Re}(z)|X}$ .

**Remarque 2.1.6.** Cette dernière étape est une conséquence de la différence fondamentale avec le cas sans masse. En effet, grâce aux symétries, il n'est pas difficile dans [DN11] de prouver que les composantes des fonctions de Jost sont majorées par  $e^{|\operatorname{Re}(z)|X}$  (voir Lemma 3.4). Cependant, dans notre étude il n'y a pas de symétrie (à cause du terme de masse) et il est plus difficile d'obtenir ces estimations. Malgré tout, il est plutôt simple de prouver que les composantes des fonctions de Jost sont majorées par  $e^{|z|X}$ . De plus, en utilisant une formule de Duhamel généralisée et des estimations précises des fonctions de Bessel modifiées, on peut prouver que les composantes des fonctions de Jost sont bornées sur  $i\mathbb{R}$ . Ces informations nous permettent alors, à l'aide du Théorème de Phragmén-Lindelöf (voir [Boa54], Theorem 1.4.2), d'obtenir les estimations voulues.

Grâce à ces estimations, on obtient que ces composantes appartiennent à une classe de

fonctions analytiques appelée classe de Nevanlinna. On définit la classe de Nevanlinna  $N(\Pi^+)$  comme étant l'ensemble des fonctions analytiques  $f(z)$  sur le demi-plan de droite  $\Pi^+ = \{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Re}(z) > 0\}$  satisfaisant

$$\sup_{0 < r < 1} \int_{-\pi}^{\pi} \ln^+ \left| f \left( \frac{1 - re^{i\varphi}}{1 + re^{i\varphi}} \right) \right| d\varphi < \infty,$$

où  $\ln^+(x) = \ln(x)$  si  $\ln(x) \geq 0$  et  $\ln^+(x) = 0$  si  $\ln(x) < 0$ . On utilise ce type de fonctions car elles sont déterminées de façon unique par leurs valeurs sur n'importe quel sous-ensemble  $\mathcal{L} \subset \mathbb{N}^*$  satisfaisant la condition de Müntz  $\sum_{n \in \mathcal{L}} \frac{1}{n} = \infty$  (voir par exemple [Ram99] et [Rud87]). Ainsi, avec un peu de travail, on conclut alors que l'égalité entre les coefficients de réflexion n'est pas seulement vraie pour les entiers  $n \in \mathbb{N}^*$ , mais en réalité pour presque tout  $z$  dans le plan complexe (exceptés les pôles des coefficients de réflexion). On élargit ainsi considérablement l'information à notre disposition pour déterminer la métrique du trou noir.

La dernière étape pour conclure la preuve du Théorème 2.1.1 s'appuie sur une idée empruntée à [FY05]. Considérons deux trous noirs ayant respectivement pour paramètres  $M, Q, \Lambda$  et  $\tilde{M}, \tilde{Q}, \tilde{\Lambda}$ . On ajoute un signe “ $\sim$ ” aux quantités correspondant au trou noir ayant pour paramètres  $\tilde{M}, \tilde{Q}$  et  $\tilde{\Lambda}$ . En utilisant les asymptotiques des composantes de la matrice  $\hat{A}_L(\lambda, z)$ , on commence par prouver que

$$A = \int_{\mathbb{R}} a(s) ds = \int_{\mathbb{R}} \tilde{a}(s) ds = \tilde{A}.$$

On définit ainsi, pour  $X \in ]0, A[$ , une fonction à valeurs matricielles  $P(X, \lambda, z)$  faisant le lien entre les fonctions de Jost pour le premier et le second trou noir :

$$P(X, \lambda, z) \tilde{F}_R(\tilde{h}(X), \lambda, z) = F_R(h(X), \lambda, z).$$

En utilisant les asymptotiques précédentes et l'égalité entre les coefficients de réflexion sur  $\mathbb{C}$ , on montre alors que la matrice  $P$  est (au signe près) la matrice identité.

**Remarque 2.1.7.** *Dans cette étape apparaît une dernière conséquence de la présence du terme de masse dans notre problème. Dans le cas sans masse, on peut effectuer des calculs explicites pour les données de diffusion dans le cas  $z = 0$  car l'opérateur de Dirac unidimensionnel est alors simplement  $\Gamma^1 D_x$ . Ces expressions explicites des données de diffusion sont utilisées pour montrer que  $P$  est (au signe près) l'identité une fois que l'on a montré que  $P$  est constante en la variable  $z$ . À cause du terme de masse, on ne peut pas procéder à des calculs explicites dans le cas massif et chargé et l'on doit donc utiliser*

*une stratégie différente pour obtenir le résultat voulu.*

Les fonctions de Jost des deux trous noirs étant si fortement liées, on conclut facilement que

$$\frac{c - \lambda}{a}(h(X)) = \frac{\tilde{c} - \lambda}{\tilde{a}}(\tilde{h}(X)), \quad \frac{b}{a}(h(X)) = \frac{\tilde{b}}{\tilde{a}}(\tilde{h}(X)), \quad \forall X \in ]0, A[.$$

Finalement, grâce à ces égalités et en utilisant la forme explicite des potentiels  $a$ ,  $b$  et  $c$ , on conclut que

$$M = \tilde{M}, \quad Q = \tilde{Q}, \quad \Lambda = \tilde{\Lambda}.$$

Ce chapitre est organisé de la façon suivante. Dans la Section 2.2 on rappelle les résultats de diffusion directes de [Dau10, Mel04] utiles pour notre analyse future. Dans la Section 2.3 on commence par montrer comment notre modèle peut être transformé afin de rentrer dans le cadre étudié dans [AKvdM00] et on trouve des systèmes d'équations différentielles de second ordre satisfaits par les composantes des fonctions de Jost en la variable  $x$ . Dans la Section 2.4 on introduit la variable de Liouville  $X$  pour réécrire les équations précédentes comme des perturbations d'équations de Bessel modifiées en cette variable. On utilise ensuite des estimations du noyau de Green des fonctions de Bessel modifiées et des estimations des composantes des fonctions de Jost pour obtenir des asymptotiques précises des composantes des fonctions de Jost et de la matrice  $\hat{A}_L$  pour  $z$  grand dans le plan complexe. Dans la Section 2.5 on utilise un résultat d'unicité pour les fonctions de la classe de Nevanlinna afin d'étendre notre hypothèse à presque tout le plan complexe. Finalement, dans la Section 2.6, on prouve notre Théorème 2.1.1.

## 2.2 Problème de diffusion directe

Dans cette Section, on rappelle l'expression de l'équation de Dirac dans les trous noirs de type RN-dS ainsi que la théorie de la diffusion directe obtenue dans [Dau10, Mel04]. Comme expliqué dans la Section 2.1.1, on décrit la région extérieure d'un trou noir de type RN-dS en utilisant la variable de Regge-Wheeler  $x$  définie par (2.1.4). On travaille ainsi sur la variété  $\mathcal{B} = \mathbb{R}_t \times \Sigma$  avec  $\Sigma = \mathbb{R}_x \times S_{\theta, \varphi}^2$ , équipée de la métrique

$$g = F(r)(dt^2 - dx^2) - r^2 d\omega^2,$$

où  $F$  est donnée par (2.1.3) et  $d\omega^2 = d\theta^2 + \sin^2(\theta)d\varphi^2$  est la métrique euclidienne sur  $\mathbb{S}^2$ .

### 2.2.1 Équation de Dirac et les résultats de diffusion directe

La théorie de la diffusion pour des champs de Dirac massifs et chargés dans l'espace-temps  $\mathcal{B}$  a fait l'objet des articles [Dau10, Mel04]. On rappelle brièvement ici les résultats principaux de ces travaux. En particulier, on utilise la forme de l'équation de Dirac qui y est obtenue.

On commence par écrire l'équation d'évolution satisfaite par les champs de Dirac massifs et chargés dans  $\mathcal{B}$  sous la forme hamiltonienne

$$i\partial_t\psi = H\psi, \quad (2.2.1)$$

où  $\psi$  est un spineur à quatre composantes appartenant à l'espace de Hilbert

$$\mathcal{H} = L^2(\mathbb{R} \times \mathbb{S}^2; \mathbb{C}^4),$$

et le hamiltonien  $H$  est donné par

$$H = \Gamma^1 D_x + a(x)\mathbb{D}_{\mathbb{S}^2} + b(x)\Gamma^0 + c(x). \quad (2.2.2)$$

Le symbole  $D_x$  désigne  $-i\partial_x$  alors que  $\mathbb{D}_{\mathbb{S}^2}$  désigne l'opérateur de Dirac sur  $\mathbb{S}^2$  qui, en coordonnées sphériques, prend la forme donnée dans (2.1.7). Les potentiels  $a$ ,  $b$  et  $c$  sont des fonctions scalaires lisses données en termes de la métrique (2.1.2) par (2.1.8). Enfin, les matrices  $\Gamma^1$ ,  $\Gamma^2$ ,  $\Gamma^3$  et  $\Gamma^0$  apparaissant dans (2.2.2) et (2.1.7) sont les matrices  $4 \times 4$  de Dirac usuelles satisfaisant les relations d'anti-commutativité

$$\Gamma^i \Gamma^j + \Gamma^j \Gamma^i = 2\delta_{ij} Id, \quad \forall i, j = 0, 1, 2, 3. \quad (2.2.3)$$

On utilise à présent la symétrie sphérique de l'équation pour simplifier l'expression du hamiltonien  $H$ . On peut diagonaliser l'opérateur de Dirac sur  $\mathbb{S}^2$  en une somme infinie d'opérateurs à valeurs matricielles en le décomposant sur une base d'harmoniques sphériques spinorielles à poids (voir [GŠ56]). Plus précisément, il existe une famille de spineurs  $F_k^l$ , ayant pour indices les couples  $(l, k)$  appartenant à l'ensemble  $\mathcal{I} = \{(l, k), l - \frac{1}{2} \in \mathbb{N}, l - |k| \in \mathbb{N}\}$ , formant une base hilbertienne de  $L^2(\mathbb{S}^2; \mathbb{C}^4)$  et ayant la propriété suivante. L'espace de Hilbert  $\mathcal{H}$  peut être décomposé en une somme directe infinie

$$\mathcal{H} = \bigoplus_{(l,k) \in \mathcal{I}} (L^2(\mathbb{R}_x; \mathbb{C}^4) \otimes F_k^l) = \bigoplus_{(l,k) \in \mathcal{I}} \mathcal{H}_{lk},$$

où  $\mathcal{H}_{lk} = L^2(\mathbb{R}_x; \mathbb{C}^4) \otimes F_k^l$  est identifié avec  $L^2(\mathbb{R}; \mathbb{C}^4)$  et, plus important, on obtient une décomposition orthogonale du hamiltonien  $H$

$$H = \bigoplus_{(l,k) \in \mathcal{I}} H^{lk},$$

avec

$$H^{lk} := H|_{\mathcal{H}_{lk}} = \Gamma^1 D_x + a_l(x) \Gamma^2 + b(x) \Gamma^0 + c(x), \quad (2.2.4)$$

et  $a_l(x) = -\left(l + \frac{1}{2}\right) a(x)$ . On note que l'opérateur de Dirac  $\mathbb{D}_{\mathbb{S}^2}$  a été remplacé dans l'expression de  $H^{lk}$  par  $-\left(l + \frac{1}{2}\right) \Gamma^2$  grâce aux bonnes propriétés des harmoniques sphériques spinorielles à poids  $F_k^l$ . L'opérateur  $H^{lk}$  est un opérateur autoadjoint sur  $\mathcal{H}_{lk}$  ayant pour domaine  $D(H^{lk}) = H^1(\mathbb{R}; \mathbb{C}^4)$ . Finalement, on utilise la représentation suivante des matrices de Dirac  $\Gamma^1$ ,  $\Gamma^2$  et  $\Gamma^0$  apparaissant dans (2.2.4)

$$\Gamma^1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad \Gamma^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \Gamma^0 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -i & 0 \\ 0 & 0 & 0 & i \\ i & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -i & 0 & 0 \end{pmatrix}. \quad (2.2.5)$$

Dans un souci de clarté, on écrira dans ce qui suit, pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$ ,  $H_n$  au lieu de  $H^{lk}$ , où  $n = l + \frac{1}{2}$ .

On rappelle maintenant les résultats de diffusion directe obtenus dans [Dau10, Mel04] pour les hamiltoniens  $H_n$ , restrictions de  $H$  sur les harmoniques sphériques spinorielles à poids. En utilisant essentiellement la théorie de Mourre (voir [Mou81]), il est montré dans [Dau10, Mel04] que

$$\sigma_{pp}(H_n) = \emptyset, \quad \sigma_{\text{sing}}(H_n) = \emptyset.$$

En d'autres termes, le spectre de  $H_n$  est purement absolument continu. Ainsi, sur chaque harmonique sphérique, les champs de Dirac massifs et chargés diffusent vers les deux régions asymptotiques en temps long et on s'attend à ce qu'ils vérifient des équations plus simples dans ces zones. C'est l'une des informations principales encodées par la notion d'opérateurs d'ondes que l'on introduit maintenant.

Pour commencer, nous avons besoin de calculer les asymptotiques des potentiels dans ces régions asymptotiques. D'après (2.1.3) et (2.1.4), les potentiels  $a$ ,  $b$  et  $c$  possèdent les asymptotiques suivantes lorsque  $x \rightarrow \pm\infty$  (voir [DN13] Equations (3.17) et (3.18)).

**Lemme 2.2.1.** *Il existe des constantes  $a_{\pm}$ ,  $b_{\pm}$ ,  $c_{\pm}$  et  $c'_{\pm}$  telles que, lorsque  $x \rightarrow \pm\infty$ ,*

$$\begin{aligned} a(x) &= a_{\pm}e^{\kappa_{\pm}x} + O(e^{3\kappa_{\pm}x}), & a'(x) &= a_{\pm}\kappa_{\pm}e^{\kappa_{\pm}x} + O(e^{3\kappa_{\pm}x}), \\ b(x) &= b_{\pm}e^{\kappa_{\pm}x} + O(e^{3\kappa_{\pm}x}), & b'(x) &= b_{\pm}\kappa_{\pm}e^{\kappa_{\pm}x} + O(e^{3\kappa_{\pm}x}), \\ c(x) &= c_{\pm} + c'_{\pm}e^{2\kappa_{\pm}x} + O(e^{4\kappa_{\pm}x}), & c'(x) &= 2c'_{\pm}\kappa_{\pm}e^{2\kappa_{\pm}x} + O(e^{4\kappa_{\pm}x}), \end{aligned}$$

où

$$c_{-} = \frac{qQ}{r_{-}} \quad \text{et} \quad c_{+} = \frac{qQ}{r_{+}}.$$

*Démonstration.* Donnons, par exemple, la preuve pour le potentiel  $a$ . On commence par donner les asymptotiques de la variable de RW,  $x$ , lorsque  $r \rightarrow r_{\pm}$ . De (2.1.4) on déduit,

$$x = \frac{1}{2\kappa_{\pm}} \ln(|r - r_{\pm}|) + C_{\pm} + O(|r - r_{\pm}|), \quad r \rightarrow r_{\pm},$$

où

$$C_{\pm} = \ln \left( (r_{\pm} - r_n)^{\frac{1}{2\kappa_n}} (r_{\pm} - r_c)^{\frac{1}{2\kappa_c}} (r_{+} - r_{-})^{\frac{1}{2\kappa_{\mp}}} \right).$$

Ainsi,

$$e^{2\kappa_{\pm}(x-C_{\pm})} = |r - r_{\pm}|(1 + O(|r - r_{\pm}|)), \quad r \rightarrow r_{\pm},$$

et en prenant la racine carré on obtient

$$e^{\kappa_{\pm}(x-C_{\pm})} = \sqrt{|r - r_{\pm}|}(1 + O(|r - r_{\pm}|)), \quad r \rightarrow r_{\pm}.$$

De plus, un calcul simple donne,

$$a(x) = \frac{\sqrt{F(r)}}{r} = \frac{\sqrt{\mp 2\kappa_{\pm}}}{r_{\pm}} \sqrt{|r - r_{\pm}|} + O(|r - r_{\pm}|^{\frac{3}{2}}), \quad r \rightarrow r_{\pm}.$$

Le résultat se déduit alors, pour le potentiel  $a$ , de ces dernières estimations. De même on a,

$$a'(x) = F(r) \frac{d}{dr} \left( \frac{\sqrt{F(r)}}{r} \right) = \kappa_{\pm} \frac{\sqrt{\mp 2\kappa_{\pm}}}{r_{\pm}} \sqrt{|r - r_{\pm}|} + O(|r - r_{\pm}|^{\frac{3}{2}}), \quad r \rightarrow r_{\pm}.$$

□

Ainsi, les potentiels  $a$  et  $b$  sont de courte portée lorsque  $x \rightarrow \pm\infty$  et  $c - c_{-}$  et  $c - c_{+}$  sont respectivement de courte portée lorsque  $x \rightarrow -\infty$  et  $x \rightarrow +\infty$ . La dynamique de comparaison que l'on choisit à l'horizon des événements est donc celle générée par le

hamiltonien  $H_- = \Gamma^1 D_x + c_-$  alors qu'à l'horizon cosmologique on choisit la dynamique asymptotique générée par le hamiltonien  $H_+ = \Gamma^1 D_x + c_+$ . Les hamiltoniens  $H_-$  et  $H_+$  sont des opérateurs autoadjoints sur  $\mathcal{H}$  et leur spectre est exactement la droite réelle, i.e  $\sigma(H_-) = \sigma(H_+) = \mathbb{R}$ . L'opérateur de vitesse asymptotique associé aux hamiltoniens asymptotiques  $H_\pm$  est simplement  $\Gamma^1$ . On désigne les projections sur le spectre positif et le spectre négatif de l'opérateur de vitesse asymptotique  $\Gamma^1$  par

$$P_\pm = \mathbf{1}_{\mathbb{R}^\pm}(\Gamma^1).$$

Comme cela est montré dans [Dau10], on peut utiliser ces projections pour séparer la partie des champs de Dirac qui diffusent vers l'horizon des événements et la partie de ces champs qui diffusent vers l'horizon cosmologique.

On est maintenant en mesure d'introduire les opérateurs d'ondes. On définit à l'horizon des événements,

$$W_{n,(-\infty)}^\pm = s - \lim_{t \rightarrow \pm\infty} e^{itH_n} e^{-itH_-} P_\mp \quad (2.2.6)$$

et à l'horizon cosmologique,

$$W_{n,(+\infty)}^\pm = s - \lim_{t \rightarrow \pm\infty} e^{itH_n} e^{-itH_+} P_\pm. \quad (2.2.7)$$

Finalement, les opérateurs d'ondes globaux sont donnés par

$$W_n^\pm = W_{n,(-\infty)}^\pm + W_{n,(+\infty)}^\pm. \quad (2.2.8)$$

Le résultat principal de [Dau10, Mel04] est le suivant :

**Théoreme 2.2.2.** *Les opérateurs d'ondes  $W_{n,(-\infty)}^\pm$ ,  $W_{n,(+\infty)}^\pm$  et  $W_n^\pm$  existent sur  $\mathcal{H}_{lk}$ . De plus, les opérateurs globaux  $W_n^\pm$  sont des isométries sur  $\mathcal{H}_{lk}$ . En particulier, ils sont asymptotiquement complets, i.e.  $\text{Im}W_n^\pm = \mathcal{H}_{lk}$ .*

Grâce au Théorème 2.2.2, on peut définir l'opérateur de diffusion par

$$S(n) = (W_n^+)^* W_n^-$$

qui est un opérateur unitaire sur  $\mathcal{H}_{lk}$ . Comme mentionné dans la Section 2.1.2, cet opérateur peut être décomposé sous la forme

$$S(n) = \begin{pmatrix} T_L(n) & R(n) \\ L(n) & T_R(n) \end{pmatrix},$$

où,

$$T_L(n) = (W_{n,+\infty}^+)^* W_{n,-\infty}^-, \quad T_R(n) = (W_{n,-\infty}^+)^* W_{n,+\infty}^-$$

et

$$R(n) = (W_{n,+\infty}^+)^* W_{n,+\infty}^- \quad \text{et} \quad L(n) = (W_{n,-\infty}^+)^* W_{n,-\infty}^-.$$

À partir de nos définitions des opérateurs d'ondes (2.2.6) et (2.2.7), on remarque que les quantités précédentes peuvent être interprétées en termes d'opérateurs de transmission et de réflexion entre l'horizon des événements  $\{x = -\infty\}$  et l'horizon cosmologique  $\{x = +\infty\}$  du trou noir. Par exemple,  $T_R(n)$  correspond à la partie du signal transmise de  $\{x = +\infty\}$  à  $\{x = -\infty\}$  dans une expérience de diffusion alors que le terme  $T_L(n)$  correspond à la partie du signal transmise de  $\{x = -\infty\}$  à  $\{x = +\infty\}$ . Ainsi,  $T_R(n)$  désigne la “transmission à droite” et  $T_L(n)$  désigne la “transmission à gauche”. D'un autre côté,  $L(n)$  correspond à la partie d'un signal réfléchi de  $\{x = -\infty\}$  à  $\{x = -\infty\}$  dans une expérience de diffusion alors que le terme  $R(n)$  correspond à la partie du signal réfléchi de  $\{x = +\infty\}$  à  $\{x = +\infty\}$ .

## 2.3 Réduction du modèle et première analyse

Dans cette Section on commence par suivre une idée de [DN10]. Ainsi, par une série de simplifications de notre modèle, qui se réduit finalement au cadre étudié dans [AKvdM00], on rappelle la définition de la représentation stationnaire de l'opérateur de diffusion  $S(n)$  exprimée en termes des coefficients (ici matriciels) de transmission et de réflexion. Dans un second temps, en utilisant [AKvdM00], on obtient un système d'équations différentielles d'ordre deux satisfaites par les composantes des fonctions de Jost de notre modèle original.

### 2.3.1 Premières simplifications

On suit ici le travail de [DN10], Section 4.2. On rappelle que l'opérateur de diffusion  $S(n)$  est défini par

$$S(n) = (W_n^+)^* W_n^-,$$

où les opérateurs d'ondes globaux  $W_n^\pm$  sont donnés par (2.2.6)-(2.2.8). On introduit la transformation unitaire  $U$  sur  $\mathcal{H}_{lk}$

$$U = e^{-i\Gamma^1 C^-(x)}, \quad C^-(x) = \int_{-\infty}^x (c(s) - c_-) ds + c_- x,$$



et les opérateurs autoadjoints sur  $\mathcal{H}_{lk}$

$$A_0 = \Gamma^1 D_x \quad \text{et} \quad A_n = U^* H U = \Gamma^1 D_x + W(x, n). \quad (2.3.1)$$

On désigne par  $\hat{S}(A_n, A_0)$  l'opérateur de diffusion associé aux opérateurs  $A_n$  et  $A_0$ , i.e.

$$\hat{S}(A_n, A_0) = (W^+(A_n, A_0))^* W^-(A_n, A_0),$$

où les opérateurs d'ondes sont définis, comme dans [Dau10, DvdM08, Mel04], par

$$W^\pm(A_n, A_0) = s - \lim_{t \rightarrow \pm\infty} e^{itA_n} e^{-itA_0}.$$

Le couple d'opérateurs  $(A_n, A_0)$ , agissant sur  $\mathcal{H}_{lk}$ , est dans le cadre étudié dans [AKvdM00]. En effet, ils sont donnés par  $A_0 = \Gamma^1 D_x$  et  $A_n = A_0 + W(x, n)$  où le potentiel

$$W(x, n) = e^{i\Gamma^1 C^-(x)} (na(x)\Gamma^2 + b(x)\Gamma^0) e^{-i\Gamma^1 C^-(x)}$$

est la fonction à valeurs dans l'ensemble des matrices  $4 \times 4$  donnée par

$$W(x, n) = \begin{pmatrix} 0 & k(x, n) \\ k(x, n)^* & 0 \end{pmatrix}, \quad k(x, n) = e^{2iC^-(x)} \begin{pmatrix} -ib(x) & na(x) \\ -na(x) & ib(x) \end{pmatrix},$$

où  $n = l + \frac{1}{2}$ . Ici,  $k(x, n)^*$  désigne la transposée conjuguée de  $k(x, n)$ . De plus, les entrées de  $W(\cdot, n)$  sont dans  $L^1(\mathbb{R})$  (on note que notre potentiel  $W$  est meilleur puisqu'il est exponentiellement décroissant aux deux bouts  $x \rightarrow \pm\infty$ ). Ainsi, on peut utiliser la représentation stationnaire de  $\hat{S}(A_n, A_0)$ , donnée dans [AKvdM00], suivante. On introduit la transformation unitaire  $\mathcal{F}$  sur  $\mathcal{H}_{lk}$  définie par

$$\mathcal{F}\psi(\lambda) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} e^{-i\Gamma^1 x \lambda} \psi(x) dx, \quad (2.3.2)$$

alors on a (voir [AKvdM00] p. 143)

$$\hat{S}(A_n, A_0) = \mathcal{F}^* \hat{S}_0(\lambda, n) \mathcal{F},$$

où la matrice de diffusion  $\hat{S}_0(\lambda, n)$  prend la forme

$$\begin{pmatrix} \hat{T}_L(\lambda, n) & \hat{R}(\lambda, n) \\ \hat{L}(\lambda, n) & \hat{T}_R(\lambda, n) \end{pmatrix}.$$

Ici  $\hat{T}_L(\lambda, n)$  et  $\hat{T}_R(\lambda, n)$  sont des matrices  $2 \times 2$  correspondant aux coefficients de transmission de  $\hat{S}$  alors que  $\hat{L}(\lambda, n)$  et  $\hat{R}(\lambda, n)$  sont des matrices  $2 \times 2$  correspondant aux coefficients de réflexion de  $\hat{S}$ .

La définition de  $\hat{S}_0(\lambda, n)$  obtenue jusqu'ici découle d'une approche dépendante du temps de la théorie de la diffusion pour  $(A_n, A_0)$ . Comme mentionné dans la Section 2.1.3 il existe une définition alternative mais équivalente de  $\hat{S}_0(\lambda, n)$  qui sera plus simple à manipuler et qui provient d'une approche stationnaire de la théorie de la diffusion pour  $(A_n, A_0)$ . On rappelle ainsi que les coefficients de transmission et de réflexion peuvent être exprimés en termes des fonctions de Jost qui sont des solutions de (2.1.10) ayant des asymptotiques spécifiques à l'infini données par (2.1.11) et (2.1.12). Dans la suite, on a besoin de quelques relations reliant les différentes quantités de l'approche stationnaire que l'on rappelle ici. À propos des fonctions de Jost, la relation suivante peut être prouvée (voir [AKvdM00] eq. (2.5))

$$\hat{F}_R(x, \lambda, n)^* \Gamma^1 \hat{F}_R(x, \lambda, n) = \Gamma^1. \quad (2.3.3)$$

En utilisant les notations introduites dans (2.1.15) on a également des relations utiles obtenues dans [AKvdM00] sur les matrices  $\hat{A}_L$  et  $\hat{A}_R$  définies par (2.1.13) et (2.1.14). En effet, pour  $\lambda \in \mathbb{R}$  et pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$ ,

$$\hat{F}_R(x, \lambda, n)^* \Gamma^1 \hat{F}_L(x, \lambda, n) = \hat{A}_R(\lambda, n)^* \Gamma^1 = \Gamma^1 \hat{A}_L(\lambda, n)^*, \quad (2.3.4)$$

$$\hat{A}_{R2}(\lambda, n) = \hat{A}_{L3}(\lambda, n)^*, \quad \hat{A}_{R3}(\lambda, n) = -\hat{A}_{L2}(\lambda, n)^*, \quad (2.3.5)$$

$$\hat{A}_{L1}(\lambda, n) = \hat{A}_{R1}(\lambda, n)^*, \quad \hat{A}_{R4}(\lambda, n) = \hat{A}_{L4}(\lambda, n)^*, \quad (2.3.6)$$

$$\hat{A}_{L1}(\lambda, n)^* \hat{A}_{L1}(\lambda, n) = I_2 + \hat{A}_{L3}(\lambda, n)^* \hat{A}_{L3}(\lambda, n), \quad (2.3.7)$$

$$\begin{aligned} I_2 &= \hat{A}_{L1}(\lambda, n) \hat{A}_{R1}(\lambda, n) + \hat{A}_{L2}(\lambda, n) \hat{A}_{R3}(\lambda, n) \\ &= \hat{A}_{R1}(\lambda, n) \hat{A}_{L1}(\lambda, n) + \hat{A}_{R2}(\lambda, n) \hat{A}_{L3}(\lambda, n). \end{aligned} \quad (2.3.8)$$

Finalement, on fait le lien entre la représentation stationnaire  $S(\lambda, n)$  de l'opérateur de diffusion  $S$  et la matrice de diffusion  $\hat{S}_0(\lambda, n)$ . On définit deux transformations unitaires

$F_{\pm}$  sur  $\mathcal{H}$  par

$$F_+\psi(\lambda) = \mathcal{F} \begin{pmatrix} e^{ic_+x} & 0 \\ 0 & e^{-ic_-x} \end{pmatrix} \psi(\lambda) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} \begin{pmatrix} e^{-ix\lambda+ic_+x} & 0 \\ 0 & e^{ix\lambda-ic_-x} \end{pmatrix} \psi(x) dx \quad (2.3.9)$$

et

$$F_-\psi(\lambda) = \mathcal{F} \begin{pmatrix} e^{ic_-x} & 0 \\ 0 & e^{-ic_+x} \end{pmatrix} \psi(\lambda) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} \begin{pmatrix} e^{-ix\lambda+ic_-x} & 0 \\ 0 & e^{ix\lambda-ic_+x} \end{pmatrix} \psi(x) dx, \quad (2.3.10)$$

et on rappelle la Proposition suivante donnée dans [DN10].

**Proposition 2.3.1.** *L'opérateur de diffusion  $S(n)$  possède la représentation stationnaire suivante. Si  $F_{\pm}$  sont les transformations unitaires définies dans (2.3.9) et (2.3.10), alors*

$$S(n) = F_+^* S(\lambda, n) F_-,$$

où la matrice de diffusion  $4 \times 4$ ,  $S(\lambda, n)$ , est donnée par

$$S(\lambda, n) = \begin{pmatrix} e^{-i\beta} \hat{T}_L(\lambda, n) & e^{-2i\beta} \hat{R}(\lambda, n) \\ \hat{L}(\lambda, n) & e^{-i\beta} \hat{T}_R(\lambda, n) \end{pmatrix},$$

où

$$\beta = \int_{-\infty}^0 (c(s) - c_-) ds + \int_0^{+\infty} (c(s) - c_+) ds, \quad (2.3.11)$$

et les quantités  $\hat{T}_L$ ,  $\hat{T}_R$ ,  $\hat{L}$  et  $\hat{R}$  sont les matrices  $2 \times 2$  correspondant aux coefficients de transmission et de réflexion de la paire  $(A_n, A_0)$  et définies dans (2.1.17)-(2.1.19).

Dans la Section suivante on utilise une représentation intégrale des blocs de la matrice de Faddeev à droite définie par

$$\hat{M}_R(x, \lambda, n) = \hat{F}_R(x, \lambda, n) e^{-i\Gamma^1 \lambda x}.$$

Il est facile de voir à partir de (2.1.10) que  $\hat{M}_R(x, \lambda, n)$  satisfait l'équation intégrale

$$\hat{M}_R(x, \lambda, n) = I_4 + i\Gamma^1 \int_x^{+\infty} e^{-i\Gamma^1 \lambda(y-x)} W(y, n) \hat{M}_R(y, \lambda, n) e^{i\Gamma^1 \lambda(y-x)} dy. \quad (2.3.12)$$

En utilisant la notation par blocs  $2 \times 2$ ,

$$\hat{M}_R(x, \lambda, n) = \begin{pmatrix} \hat{M}_{R1}(x, \lambda, n) & \hat{M}_{R2}(x, \lambda, n) \\ \hat{M}_{R3}(x, \lambda, n) & \hat{M}_{R4}(x, \lambda, n) \end{pmatrix},$$

et en itérant (2.3.12) une fois, on obtient un système d'équations intégrales découplées pour les blocs  $\hat{M}_{Ri}(x, \lambda, n)$ ,  $i \in \{1, 2, 3, 4\}$ . Par exemple,

$$\hat{M}_{R1}(x, \lambda, n) = I_2 + \int_{-\infty}^x \left( \int_{-\infty}^y e^{2i\lambda(t-y)} k(y, n) k(t, n)^* \hat{M}_{R1}(t, \lambda, n) dt \right) dy \quad (2.3.13)$$

et

$$\begin{aligned} \hat{M}_{R2}(x, \lambda, n) &= i \int_{-\infty}^x e^{2i\lambda(x-y)} k(y, n) dy \\ &\quad + \int_{-\infty}^x \left( \int_{-\infty}^y e^{2i\lambda(x-y)} k(y, n) k(t, n)^* \hat{M}_{R2}(t, \lambda, n) dt \right) dy. \end{aligned} \quad (2.3.14)$$

Des résultats similaires sont vrais pour la matrice de Faddeev à gauche  $\hat{M}_L$  qui est définie par

$$\hat{M}_L(x, \lambda, n) = \hat{F}_L(x, \lambda, n) e^{-i\Gamma^1 \lambda x}.$$

L'équation (2.3.13) est une équation intégrale de type Volterra et peut être résolue par itération. De plus, on peut déduire de cette méthode des estimations importantes.

**Lemme 2.3.2.** *Pour tout  $x_0 \in \mathbb{R}$ , il existe une constante  $C \in \mathbb{R}$  telle que pour tout  $x \in \mathbb{R}$ , pour tout  $n \in \mathbb{N}$ , on a*

$$\|\hat{M}_{Ri}(x, \lambda, n)\| \leq C \exp \left( n \int_{-\infty}^x a(s) ds \right), \quad \forall i \in \{1, 2, 3, 4\},$$

et

$$\|\hat{M}_{Li}(x, \lambda, n)\| \leq C \exp \left( n \int_x^{+\infty} a(s) ds \right), \quad \forall i \in \{1, 2, 3, 4\}.$$

*Démonstration.* Prouvons par exemple le Lemme 2.3.2 pour  $\hat{M}_{R1}(x, \lambda, n)$  puisque les preuves pour les autres blocs sont similaires. Pour obtenir l'estimation voulue on utilise une méthode itérative. On part de l'équation intégrale (2.3.13) et on définit  $\hat{M}_{R1}^0(x, \lambda, n) = I_2$  et

$$\hat{M}_{R1}^{j+1}(x, \lambda, n) = \int_{-\infty}^x \left( \int_{-\infty}^y e^{2i\lambda(t-y)} k(y, n) k(t, n)^* \hat{M}_{R1}^j(t, \lambda, n) dt \right) dy, \quad \forall j \in \mathbb{N}.$$

On peut prouver par récurrence que

$$\|\hat{M}_{R1}^j(x, \lambda, n)\| \leq \frac{1}{(2k)!} \left( \int_{-\infty}^x \|k(s, n)\| ds \right)^{2j}, \quad \forall j \in \mathbb{N}.$$

Ainsi, on peut écrire,

$$\hat{M}_{R1}(x, \lambda, n) = \sum_{j=0}^{+\infty} \hat{M}_{R1}^j(x, \lambda, n) \quad (2.3.15)$$

et on obtient

$$\|\hat{M}_{R1}(x, \lambda, n)\| \leq \exp \left( \int_{-\infty}^x \|k(s, n)\| ds \right).$$

On rappelle que

$$k(x, n) = e^{2iC^-(x)} \begin{pmatrix} -ib(x) & na(x) \\ -na(x) & ib(x) \end{pmatrix}.$$

Donc  $\|k(x, n)\| = na(x) + b(x)$  (on choisit  $\|\cdot\| = \|\cdot\|_1$ ) et

$$\|\hat{M}_{R1}(x, \lambda, n)\| \leq \exp \left( \int_{-\infty}^{+\infty} b(s) ds \right) \exp \left( n \int_{-\infty}^x a(s) ds \right)$$

et l'estimation du Lemme 2.3.2 résulte de cette inégalité. Concernant le bloc  $\hat{M}_{R2}(x, \lambda, n)$  on pose,

$$\hat{M}_{R2}(x, \lambda, n) = \sum_{j=0}^{+\infty} \hat{M}_{R2}^j(x, \lambda, n)$$

où

$$\hat{M}_{R2}^0(x, \lambda, n) = i \int_{-\infty}^x e^{2i\lambda(x-y)} k(y, n) dy$$

et

$$\hat{M}_{R2}^{j+1}(x, \lambda, n) = \int_{-\infty}^x \left( \int_{-\infty}^y e^{2i\lambda(x-y)} k(y, n) k(t, n)^* \hat{M}_{R2}^j(t, \lambda, n) dt \right) dy, \quad \forall j \in \mathbb{N}.$$

et on procède la même façon. □

### 2.3.2 Équations différentielles d'ordre deux pour les fonctions de Jost

Le but de cette Section est de trouver un système d'équations différentielles d'ordre deux satisfait par les composantes des fonctions de Jost. Pour ce faire, on commence par donner des équations différentielles satisfaites par les blocs des matrices de Faddeev en utilisant les équations intégrales (2.13) – (2.16) et (2.18) – (2.21) de [AKvdM00]. Ensuite,

en utilisant le lien entre les matrices de Faddeev pour l'opérateur réduit  $A$  et les fonctions de Jost pour le hamiltonien  $H$ , on obtient des équations différentielles d'ordre deux pour les fonctions de Jost associées à ce dernier. On commence par prouver la Proposition suivante.

**Proposition 2.3.3.** *Les blocs des matrices de Faddeev vérifient les équations différentielles suivantes en la variable  $x$ .*

1. Les blocs  $\hat{M}_{L1}(\cdot, \lambda, n)$  et  $\hat{M}_{R1}(\cdot, \lambda, n)$  vérifient l'équation différentielle

$$\begin{aligned} A''(x, \lambda, n) &+ (2i\lambda I_2 - k'(x, n)k(x, n)^{-1})A'(x, \lambda, n) \\ &- k(x, n)k(x, n)^*A(x, \lambda, n) = 0. \end{aligned} \quad (2.3.16)$$

2. Les blocs  $\hat{M}_{L2}(\cdot, \lambda, n)$  et  $\hat{M}_{R2}(\cdot, \lambda, n)$  vérifient

$$\begin{aligned} A''(x, \lambda, n) &- (2i\lambda I_2 + k'(x, n)k(x, n)^{-1})A'(x, \lambda, n) \\ &+ (2i\lambda k'(x, n)k(x, n)^{-1} - k(x, n)k(x, n)^*)A(x, \lambda, n) = 0. \end{aligned}$$

3. Les blocs  $\hat{M}_{L3}(\cdot, \lambda, n)$  et  $\hat{M}_{R3}(\cdot, \lambda, n)$  vérifient

$$\begin{aligned} A''(x, \lambda, n) &+ (2i\lambda I_2 - k'(x, n)^*(k(x, n)^*)^{-1})A'(x, \lambda, n) \\ &- (2i\lambda k'(x, n)^*(k(x, n)^*)^{-1} + k(x, n)^*k(x, n))A(x, \lambda, n) = 0. \end{aligned}$$

4. Les blocs  $\hat{M}_{L4}(\cdot, \lambda, n)$  et  $\hat{M}_{R4}(\cdot, \lambda, n)$  vérifient

$$\begin{aligned} A''(x, \lambda, n) &- (2i\lambda I_2 + k'(x, n)^*(k(x, n)^*)^{-1})A'(x, \lambda, n) \\ &- k(x, n)^*k(x, n)A(x, \lambda, n) = 0. \end{aligned}$$

**Remarque 2.3.4.** 1. L'analyse est la même pour les fonctions de Jost à droite et à gauche. On se limitera donc à l'étude des fonctions de Jost à droite.

2. Il y a une analogie entre les équations différentielles pour les blocs  $\hat{M}_{R1}$  et  $\hat{M}_{R4}$ . En effet, les équations intégrales correspondantes sont les mêmes quitte à changer  $\lambda$  en  $-\lambda$  et  $k$  en  $k^*$ . Ainsi, dans la suite, on donnera seulement les résultats pour le bloc  $\hat{M}_{R1}$ . La même analogie étant vraie pour les blocs  $\hat{M}_{R2}$  et  $\hat{M}_{R3}$  on ne donnera également par la suite les résultats que pour le bloc  $\hat{M}_{R2}$ .

En utilisant la Proposition 2.3.3, on obtient facilement des équations différentielles d'ordre deux pour les coefficients des matrices de Faddeev. On utilise alors le lien entre ces matrices de Faddeev et les fonctions de Jost correspondant au hamiltonien  $H$ . La fonction de Jost à droite pour le hamiltonien  $A$  est donnée par

$$\hat{F}_R(x, \lambda, n) = \hat{M}_R(x, \lambda, n)e^{i\lambda\Gamma^1 x}.$$

On rappelle que

$$H = e^{-i\Gamma^1 C^-(x)} A e^{i\Gamma^1 C^-(x)}.$$

Ainsi, la fonction de Jost à droite pour le hamiltonien  $H$  est définie par

$$F_R(x, \lambda, n) = e^{-i\Gamma^1 C^-(x)} \hat{M}_R(x, \lambda, n) e^{i\lambda\Gamma^1 x} \quad (2.3.17)$$

et de façon similaire la fonction de Jost à gauche du hamiltonien  $H$  est définie par

$$F_L(x, \lambda, n) = e^{-i\Gamma^1 C^-(x)} \hat{M}_L(x, \lambda, n) e^{i\lambda\Gamma^1 x}. \quad (2.3.18)$$

On utilise la notation

$$F_R(x, \lambda, n) = \begin{pmatrix} F_{R1}(x, \lambda, n) & F_{R2}(x, \lambda, n) \\ F_{R3}(x, \lambda, n) & F_{R4}(x, \lambda, n) \end{pmatrix},$$

où

$$F_{Ri}(x, \lambda, n) = \begin{pmatrix} F_{Ri,1}(x, \lambda, n) & F_{Ri,2}(x, \lambda, n) \\ F_{Ri,3}(x, \lambda, n) & F_{Ri,4}(x, \lambda, n) \end{pmatrix},$$

et la notation correspondante pour la fonction de Jost à gauche. En utilisant les égalités précédentes et la Proposition 2.3.3 on obtient la Proposition suivante.

**Proposition 2.3.5.** *Les coefficients des fonctions de Jost vérifient les équations couplées en la variable  $x$  suivantes.*

1. Pour  $i \in \{1, 2\}$  et  $(j, k) \in \{(1, 3), (3, 1), (2, 4), (4, 2)\}$  il existe une fonction  $f_{i,j,k}(x, \lambda, n)$  telle que la composante  $F_{Ri,j}$  de la fonction de Jost à droite et la composante  $F_{Li,j}$  de la fonction de Jost à gauche vérifient l'équation différentielle couplée

$$u''(x, \lambda, n) - \frac{a'(x)}{a(x)} u'(x, \lambda, n) + q(x, \lambda, n) u(x, \lambda, n) = f_{i,j,k}(x, \lambda, n),$$

où,

$$q(x, \lambda, n) = \left( i c'(x) + (c(x) - \lambda)^2 - i(c(x) - \lambda) \frac{a'(x)}{a(x)} - (n^2 a(x)^2 + b(x)^2) \right),$$

et

$$\begin{aligned} f_{i,j,k} &= c_{1,i,j} F'_{Ri,j}(x, \lambda, n) + c_{2,i,k} F'_{Ri,k}(x, \lambda, n) \\ &\quad + c_{3,i,j} F_{Ri,j}(x, \lambda, n) + c_{4,i,k} F_{Ri,k}(x, \lambda, n), \end{aligned}$$

avec,

$$c_{r,i,t}(x, \lambda, n) = O\left(\frac{1}{n}\right), \quad n \rightarrow \infty, \quad \forall r \in \{1, 2, 3, 4\} \quad \text{et} \quad t \in \{j, k\}.$$

2. Pour  $i \in \{3, 4\}$  et  $(j, k) \in \{(1, 3), (3, 1), (2, 4), (4, 2)\}$  il existe une fonction  $f_{i,j,k}(x, \lambda, n)$  telle que la composante  $F_{Ri,j}$  de la fonction de Jost à droite et la composante  $F_{Li,j}$  de la fonction de Jost à gauche vérifient l'équation différentielle couplée

$$u''(x, \lambda, n) - \frac{a'(x)}{a(x)} u'(x, \lambda, n) + \overline{q(x, \lambda, n)} u(x, \lambda, n) = f_{i,j,k}(x, \lambda, n),$$

où,

$$\begin{aligned} f_{i,j,k} &= c_{1,i,j} F'_{Ri,j}(x, \lambda, n) + c_{2,i,k} F'_{Ri,k}(x, \lambda, n) \\ &\quad + c_{3,i,j} F_{Ri,j}(x, \lambda, n) + c_{4,i,k} F_{Ri,k}(x, \lambda, n), \end{aligned}$$

avec,

$$c_{r,i,t}(x, \lambda, n) = O\left(\frac{1}{n}\right), \quad n \rightarrow \infty, \quad \forall r \in \{1, 2, 3, 4\} \quad \text{et} \quad t \in \{j, k\}.$$

*Démonstration.* Pour prouver ce résultat, par exemple pour le coefficient  $F_{R1,1}$ , on utilise l'égalité

$$\hat{M}_{R1}(x, \lambda, n) = e^{i(C^-(x) - \lambda x)} F_{R1}(x, \lambda, n)$$

et l'équation différentielle obtenue pour le premier bloc de la matrice de Faddeev dans la Proposition 2.3.3. On obtient

$$F''_{R1,1}(x, \lambda, n) - \frac{a'(x)}{a(x)} F'_{R1,1}(x, \lambda, n) + q(x, \lambda, n) F_{R1,1}(x, \lambda, n) = f_{1,1,3}(x, \lambda, n),$$



où

$$\begin{aligned} f_{1,1,3}(x, \lambda, n) &= c_1(x, \lambda, n)F'_{R1,1}(x, \lambda, n) + c_2(x, \lambda, n)F'_{R1,3}(x, \lambda, n) \\ &\quad + c_3(x, \lambda, n)F_{R1,1}(x, \lambda, n) + c_4(x, \lambda, n)F_{R1,3}(x, \lambda, n) \end{aligned} \quad (2.3.19)$$

et

$$c_1(x, \lambda, n) = \frac{a(x)^2 b(x) b'(x) - a'(x) a(x) b(x)^2}{(n^2 a(x)^2 + b(x)^2) a(x)^2} \quad (2.3.20)$$

$$c_2(x, \lambda, n) = -\frac{in(-a(x)b'(x) + a'(x)b(x))}{n^2 a(x)^2 + b(x)^2} \quad (2.3.21)$$

$$c_3(x, \lambda, n) = i(c(x) - \lambda) \left( \frac{a(x)^2 b(x) b'(x) - a'(x) a(x) b(x)^2}{(n^2 a(x)^2 + b(x)^2) a(x)^2} \right) \quad (2.3.22)$$

$$c_4(x, \lambda, n) = (c(x) - \lambda) \left( \frac{n(-a(x)b'(x) + a'(x)b(x))}{n^2 a(x)^2 + b(x)^2} \right). \quad (2.3.23)$$

On prouve la Proposition pour les autres composantes des fonctions de Jost de façon similaire. On note par exemple que

$$\begin{aligned} f_{1,3,1}(x, \lambda, n) &= c_1(x, \lambda, n)F'_{R1,3}(x, \lambda, n) + c_2(x, \lambda, n)F'_{R1,1}(x, \lambda, n) \\ &\quad + c_3(x, \lambda, n)F_{R1,3}(x, \lambda, n) + c_4(x, \lambda, n)F_{R1,1}(x, \lambda, n). \end{aligned}$$

□

**Remarque 2.3.6.** 1. Si  $b = c = 0$  on obtient que  $F_{Ri,j}$  et  $F_{Li,j}$ , où  $i \in \{1, 2\}$  et  $j \in \{1, 2, 3, 4\}$ , vérifient l'équation différentielle découplée

$$u''(x, \lambda, n) - \frac{a'(x)}{a(x)}u'(x, \lambda, n) + \left( \lambda^2 + i\lambda \frac{a'(x)}{a(x)} - n^2 a(x)^2 \right) u(x, \lambda, n) = 0,$$

alors que  $F_{Ri,j}$  et  $F_{Li,j}$ , où  $i \in \{3, 4\}$  et  $j \in \{1, 2, 3, 4\}$ , vérifient l'équation différentielle

$$u''(x, \lambda, n) - \frac{a'(x)}{a(x)}u'(x, \lambda, n) + \left( \lambda^2 - i\lambda \frac{a'(x)}{a(x)} - n^2 a(x)^2 \right) u(x, \lambda, n) = 0.$$

Ce sont les Équations (3.21) et (3.22) obtenues dans le cas sans masse et sans charge étudié dans [DN11].

2. Il est important de noter que dans le cas massif les fonctions de Jost satisfont des équations différentielles couplées deux à deux alors que dans le cas sans masse ces

*composantes vérifient des équations différentielles ordinaires indépendantes. Cette structure sera fondamentale dans la Section 2.4.4.*

## 2.4 Asymptotiques en le moment angulaire

Dans cette Section, on autorise le moment angulaire à prendre des valeurs complexes. Comme dans la Section 4 de [DN11], nous allons alors obtenir des asymptotiques des fonctions de Jost et de la matrice  $\hat{A}_L(\lambda, z)$  lorsque  $|z| \rightarrow \infty$ ,  $z \in \mathbb{C}$ . Pour ce faire, nous allons utiliser la décroissance exponentielle des potentiels  $a(x)$  et  $b(x)$  aux deux horizons et ainsi la nature asymptotiquement hyperbolique de la géométrie. D'un point de vue technique nous utiliserons pour obtenir les asymptotiques recherchées un changement de variable de Liouville et un argument perturbatif.

### 2.4.1 Variable de Liouville et équations de Bessel

On suit ici la stratégie de [CKM92, CM69, DN11]. On considère les équations différentielles données dans la Proposition 2.3.5 et on utilise une transformation de Liouville, i.e. un changement de variable  $X = g(x)$ , qui transforme ces équations en des équations de Sturm-Liouville singulières dans lesquelles le moment angulaire complexe  $z$  est devenu le paramètre spectral. Plus précisément la transformation de Liouville est définie par

$$X = g(x) = \int_{-\infty}^x a(t) dt.$$

Il est clair que  $g = \mathbb{R} \rightarrow ]0, A[$  est un  $C^1$ -difféomorphisme où

$$A = \int_{\mathbb{R}} a(t) dt.$$

Dans un soucis de simplicité, on désigne par  $h = g^{-1}$  le difféomorphisme inverse de  $g$  et on utilise les notations  $f'(X) = \frac{\partial f}{\partial X}(X)$ ,  $F_L(X, \lambda, z) = F_L(h(X), \lambda, z)$  et  $F_R(X, \lambda, z) = F_R(h(X), \lambda, z)$ .

On commence par un Lemme élémentaire qui énonce que, dans la variable  $X$ , les fonctions de Jost satisfont des équations de Sturm-Liouville avec des potentiels ayant des singularités quadratiques aux bords.

**Lemme 2.4.1.** *Pour  $i \in \{1, 2\}$  et  $(j, k) \in \{(1, 3), (3, 1), (2, 4), (4, 2)\}$  la composante  $F_{Ri,j}$  de la fonction de Jost à droite et la composante  $F_{Li,j}$  de la fonction de Jost à gauche*

vérifient l'équation différentielle couplée

$$u''(X, \lambda, z) + q(X, \lambda)u(X, \lambda, z) = z^2u(X, \lambda, z) + \frac{f_{i,j,k}(X, \lambda, z)}{a(X)^2},$$

alors que pour  $i \in \{3, 4\}$  et  $(j, k) \in \{(1, 3), (3, 1), (2, 4), (4, 2)\}$  la composante  $F_{Ri,j}$  de la fonction de Jost à droite et la composante  $F_{Li,j}$  de la fonction de Jost à gauche vérifient l'équation différentielle couplée

$$u''(X, \lambda, z) + \overline{q(X, \lambda)}u(X, \lambda, z) = z^2u(X, \lambda, z) + \frac{f_{i,j,k}(X, \lambda, z)}{a(X)^2},$$

où

$$q(X, \lambda) = i \frac{c'(X)}{a(X)^2} + \frac{(c(X) - \lambda)^2}{a(X)^2} - i(c(X) - \lambda) \frac{a'(X)}{a(X)^3} - \frac{b(X)^2}{a(X)^2}.$$

Ici les fonctions  $f_{i,j,k}$  sont celles apparaissant dans la Proposition 2.3.5. De plus, lorsque  $X \rightarrow 0$ ,

$$q(X, \lambda) = \frac{\omega_-}{X^2} + q_-(X, \lambda), \quad \text{avec} \quad \omega_- = \frac{(c_- - \lambda)^2}{\kappa_-^2} - i \frac{(c_- - \lambda)}{\kappa_-} \quad (2.4.1)$$

et

$$q_-(X, \lambda) = O(1), \quad X \rightarrow 0.$$

De même, lorsque  $X \rightarrow A$ ,

$$q(X, \lambda) = \frac{\omega_+}{(A - X)^2} + q_+(X, \lambda), \quad \text{avec} \quad \omega_+ = \frac{(c_+ - \lambda)^2}{\kappa_+^2} - i \frac{(c_+ - \lambda)}{\kappa_+} \quad (2.4.2)$$

et

$$q_+(X, \lambda) = O(1), \quad X \rightarrow A.$$

**Remarque 2.4.2.** Dans le cas  $b = c = 0$  on obtient que les fonctions de Jost  $F_{Ri,j}(X, \lambda, z)$  et  $F_{Li,j}(X, \lambda, z)$ , où  $i \in \{1, 2\}$  et  $j \in \{1, 2, 3, 4\}$ , vérifient l'équation de Sturm-Liouville découplée

$$u''(X, \lambda, z) + \left( \frac{\lambda^2}{a(X)^2} + i\lambda \frac{a'(X)}{a(X)^3} \right) u(X, \lambda, z) = z^2u(X, \lambda, z)$$

alors que  $F_{Ri,j}(X, \lambda, z)$  et  $F_{Li,j}(X, \lambda, z)$ , où  $i \in \{3, 4\}$  et  $j \in \{1, 2, 3, 4\}$ , vérifient l'équation de Sturm-Liouville

$$u''(X, \lambda, z) + \left( \frac{\lambda^2}{a(X)^2} - i\lambda \frac{a'(X)}{a(X)^3} \right) u(X, \lambda, z) = z^2u(X, \lambda, z).$$

## 2.4. Asymptotiques en le moment angulaire

---

Ce sont les équations (4.5) et (4.6) obtenues dans le Lemme 4.1 de [DN11]. De plus, on obtient que

$$\omega_- = \frac{\lambda}{\kappa_-^2} + i \frac{\lambda}{\kappa_-}$$

et

$$\omega_+ = \frac{\lambda}{\kappa_+^2} + i \frac{\lambda}{\kappa_+}$$

ce qui correspond aux Équations (4.7) et (4.8) de ce même Lemme.

*Démonstration.* Puisque les preuves sont les mêmes pour les autres composantes, on prouve la Proposition 2.4.1 seulement pour  $F_{R1,1}$ . En utilisant une transformation de Liouville et les notations  $a(X) = a(h(X))$ ,  $b(X) = b(h(X))$  et  $c(X) = c(h(X))$ , on obtient que  $F_{R1,1}$  satisfait l'équation de Sturm-Liouville :

$$u''(X, \lambda, z) + q(X, \lambda)u(X, \lambda, z) = z^2u(X, \lambda, z) + \frac{f_{1,1,3}(X, \lambda, z)}{a(X)^2}$$

où

$$q(X, \lambda) = i \frac{c'(X)}{a(X)^2} + \frac{(c(X) - \lambda)^2}{a(X)^2} - i(c(X) - \lambda) \frac{a'(X)}{a(X)^3} - \frac{b(X)^2}{a(X)^2}$$

et (en omettant les variables pour les fonctions de Jost)

$$\begin{aligned} f_{1,1,3}(X, \lambda, z) &= \left( \frac{a(X)^2 b(X) b'(X) - a'(X) a(X) b(X)^2}{(z^2 a(X)^2 + b(X)^2) a(X)} \right) F'_{R1,1} \\ &\quad + i(c(X) - \lambda) \left( \frac{a(X)^2 b(X) b'(X) - a'(X) a(X) b(X)^2}{(z^2 a(X)^2 + b(X)^2) a(X)^2} \right) F_{R1,1} \\ &\quad - \frac{iz(-a(X) b'(X) + a'(X) b(X)) a(X)}{z^2 a(X)^2 + b(X)^2} F'_{R1,3} \\ &\quad + \frac{z(-a(X) b'(X) + a'(X) b(X))}{z^2 a(X)^2 + b(X)^2} (c(X) - \lambda) F_{R1,3}. \end{aligned}$$

Pour montrer que le potentiel  $q$  possède des singularités quadratiques données par (2.4.1) on utilise le Lemme suivant :

**Lemme 2.4.3.** *Lorsque  $X \rightarrow 0$ , les potentiels vérifient :*

$$a(X) = \kappa_- X + O(X^3), \quad a'(X) = \kappa_-^2 X + O(X^3),$$

$$b(X) = \frac{b_- \kappa_-}{a_-} X + O(X^3), \quad b'(X) = \frac{b_- \kappa_-^2}{a_-} X + O(X^3),$$

$$c(X) = c_- + \frac{c'_- \kappa_-}{a_-} X^2 + O(X^4), \quad c'(X) = \frac{c'_- \kappa_-^2}{a_-} X^2 + O(X^4).$$

*Démonstration.* On sait que

$$X = \int_{-\infty}^x a(t) dt = \frac{a_-}{\kappa_-} e^{\kappa_- x} + O(e^{3\kappa_- x}).$$

Ainsi,  $e^{\kappa_- x} = O(X)$  et d'après le Lemme 2.2.1, lorsque  $X \rightarrow 0$ ,

$$a(X) = \kappa_- X + O(X^3).$$

De même, on obtient

$$a'(X) = \kappa_-^2 X + O(X^3).$$

En utilisant ces asymptotiques et le Lemme 2.2.1, on obtient de même les résultats pour les potentiels  $b$  et  $c$ .  $\square$

Finalement, en utilisant le Lemme 2.4.3, on obtient facilement que, lorsque  $X \rightarrow 0$ ,

$$\begin{aligned} q(X, \lambda) &= i \frac{c'(X)}{a(X)^2} + \frac{(c(X) - \lambda)^2}{a(X)^2} - i(c(X) - \lambda) \frac{a'(X)}{a(X)^3} - \frac{b(X)^2}{a(X)^2} \\ &= \frac{(c_- - \lambda)^2 - i(c_- - \lambda) + O(X^2)}{(\kappa_- X + O(X^2))^2} \\ &= \frac{\omega_-}{X^2} + q_-(X, \lambda). \end{aligned}$$

La preuve est la même lorsque  $X \rightarrow A$ .  $\square$

Dans ce qui suit, nous allons résoudre les équations données dans le Lemme 2.4.1 par un argument perturbatif. On a d'abord besoin du Lemme suivant pour donner un sens aux termes de reste et pour calculer les asymptotiques des fonctions de Jost à droite (respectivement à gauche) lorsque  $X \rightarrow 0$  (respectivement  $X \rightarrow A$ ).

**Lemme 2.4.4.** *Pour tout  $z \in \mathbb{C}$  fixé, pour  $i \in \{1, 2\}$  et pour  $(j, k) \in \{(1, 3), (2, 4), (3, 1), (4, 2)\}$ ,*

$$h_{i,j,k}(X, \lambda, z) = \frac{f_{i,j,k}(X, \lambda, z)}{a(X)^2} = O(1), \quad \text{lorsque } X \rightarrow 0 \text{ et } X \rightarrow A.$$

*Démonstration.* C'est une conséquence du Lemme 2.4.3 et du fait que les composantes des fonctions de Jost sont bornées lorsque  $X \rightarrow 0$  et  $X \rightarrow A$ .  $\square$

L'intérêt des équations différentielles obtenues dans le Lemme 2.4.1 réside dans le fait que les parties homogènes de ces équations sont des équations de Bessel modifiées (voir 5.4.11 dans [Leb65])

$$u'' + \frac{1-2\alpha}{X}u' + \left( (\beta\gamma X^{\gamma-1})^2 + \frac{\alpha^2 - \nu^2\gamma^2}{X^2} \right) u = 0.$$

En effet, dans notre cas les équations homogènes sont

$$u'' + \frac{\omega_-}{X^2}u = z^2u$$

et

$$u'' + \frac{\bar{\omega}_-}{X^2}u = z^2u,$$

où

$$\omega_- = \frac{(c_- - \lambda)^2}{\kappa_-^2} - i \frac{(c_- - \lambda)}{\kappa_-}.$$

Ainsi, on choisit  $\alpha = \frac{1}{2}$ ,  $\gamma = 1$ ,  $\beta = iz$  et

$$\nu_- = \frac{1}{2} - i \frac{(\lambda - c_-)}{\kappa_-}, \quad (\nu_- \notin \mathbb{Z}),$$

pour la première équation et

$$\mu_- = \bar{\nu}_- = \frac{1}{2} + i \frac{(\lambda - c_-)}{\kappa_-},$$

pour la seconde.

**Remarque 2.4.5.** Si  $b = c = 0$  on obtient

$$\nu_- = \frac{1}{2} - i \frac{\lambda}{\kappa_-}$$

et

$$\mu_- = \frac{1}{2} + i \frac{\lambda}{\kappa_-}$$

qui sont les choix faits dans [DN11].

Comme nous allons le voir dans la Section suivante ces équations ont été largement étudiées et en particulier les asymptotiques des solutions de ces équations sont bien connues.

### 2.4.2 Estimations du noyau de Green et des fonctions de Jost

Les équations de Sturm-Liouville singulières comme celles de la Proposition 2.4.1 ont été étudiées dans [FY05] par Freiling et Yurko. On suit l'esprit de [DN11] mais, puisque l'on n'a pas de développement en séries des fonctions de Jost, notre preuve est légèrement différente. On utilise le fait que les fonctions de Bessel modifiées forment un système fondamental de solutions de l'équation

$$u'' + \frac{\omega}{X^2}u = z^2u,$$

les asymptotiques connues de ces fonctions données dans [Leb65] ainsi que de bonnes estimations du noyau de Green pour obtenir les asymptotiques des fonctions de Jost lorsque  $|z| \rightarrow \infty$ . On rappelle la définition des fonctions de Bessel modifiées donnée dans [Leb65] :

$$I_\nu(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\left(\frac{z}{2}\right)^{\nu+2k}}{\Gamma(k+\nu+1)k!}, \quad |z| < \infty, \quad |\arg(z)| < \pi, \quad \nu \in \mathbb{C}, \quad (2.4.3)$$

$$K_\nu(z) = \frac{\pi}{2} \frac{I_{-\nu}(z) - I_\nu(z)}{\sin \nu\pi}, \quad |\arg(z)| < \pi, \quad \nu \notin \mathbb{Z}. \quad (2.4.4)$$

Le but de cette Section est de démontrer le Théorème suivant :

**Théoreme 2.4.6.** *On pose*

$$\alpha_R(z) = \left(\frac{z}{2}\right)^{\nu_-} \left(\frac{\kappa_-}{a_-}\right)^{i\left(\frac{\lambda-c_-}{\kappa_-}\right)} \Gamma(1-\nu_-)$$

et

$$\beta_R(z) = \left(\frac{z}{2}\right)^{\mu_-} \left(\frac{\kappa_-}{a_-}\right)^{-i\left(\frac{\lambda-c_-}{\kappa_-}\right)} \Gamma(1-\mu_-).$$

Pour  $z$  grand dans le plan complexe (voir la remarque suivante), les fonctions de Jost à droite vérifient les asymptotiques suivantes, uniformément pour chaque sous-ensemble compact de  $]0, A[$ ,

$$\left\| F_{R1}(X, \lambda, z) - \alpha_R(z) \sqrt{X} I_{-\nu_-}(zX) \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\| = O\left(\frac{e^{|\operatorname{Re}(z)|X}}{|z|}\right),$$

$$\left\| F_{R2}(X, \lambda, z) - i\beta_R(z) \sqrt{X} I_{\nu_-}(zX) \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \right\| = O\left(\frac{e^{|\operatorname{Re}(z)|X}}{|z|}\right),$$

$$\left\| F_{R3}(X, \lambda, z) - i\overline{\beta_R(\bar{z})}\sqrt{X}I_{\mu_-}(zX) \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \right\| = O\left(\frac{e^{|\operatorname{Re}(z)|X}}{|z|}\right),$$

$$\left\| F_{R4}(X, \lambda, z) - \overline{\alpha_R(\bar{z})}\sqrt{X}I_{-\mu_-}(zX) \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\| = O\left(\frac{e^{|\operatorname{Re}(z)|X}}{|z|}\right).$$

**Remarque 2.4.7.** On doit être prudent dans la définition de nos asymptotiques sur tout le plan complexe. On rappelle l'asymptotique donnée dans [Leb65] : pour  $z$  grand tel que  $|\arg(z)| \leq \pi - \delta$ ,  $\delta > 0$ ,

$$I_{\nu_-}(z) = \frac{e^z}{(2\pi z)^{\frac{1}{2}}} \left(1 + O\left(\frac{1}{z}\right)\right) + \frac{e^{-z + \operatorname{sg}(\operatorname{Im}(z))i\pi(\nu_- + \frac{1}{2})}}{(2\pi z)^{\frac{1}{2}}} \left(1 + O\left(\frac{1}{z}\right)\right). \quad (2.4.5)$$

où  $\operatorname{sg}$  est la fonction signe définie par  $\operatorname{sg}(x) = 1$  si  $x > 0$ ,  $0$  si  $x = 0$  et  $-1$  si  $x < 0$ . Ainsi, cette estimation est vraie sur le plan complexe excepté au voisinage de l'axe  $\mathbb{R}^-$ . Cependant, puisque l'application  $z \mapsto \alpha_R(z)\sqrt{X}I_{-\nu_-}(zX)$  est entière et paire (voir (2.4.3)) on peut étendre les asymptotiques à tout le plan complexe. Ceci est également vrai pour  $F_{R2}$ ,  $F_{R3}$  et  $F_{R4}$ .

On observe également que, dans les asymptotiques pour  $z$  grand dans le plan complexe, on a

$$F_{R1}(X, \lambda, z) \sim F_{R4}(X, \lambda, \bar{z})^*$$

et

$$F_{R2}(X, \lambda, z) \sim F_{R3}(X, \lambda, \bar{z})^*.$$

Ce sont les symétries données dans [DN11] et qui ne sont pas vraies en général ici à cause de la masse  $m$  des champs de Dirac. On s'attendait à trouver ces symétries pour  $z$  grand puisque le terme le plus important dans le potentiel pour de tel  $z$  est  $za(x)$ , et le terme de masse  $b$  n'a donc pas d'influence dans ce régime.

En utilisant l'asymptotique (2.4.5), on peut prouver le Théorème suivant pour les asymptotiques des fonctions de Jost pour  $z \rightarrow +\infty$ ,  $z$  réel.

**Théoreme 2.4.8.** Les fonctions de Jost à droite vérifient les asymptotiques suivantes pour  $z \rightarrow +\infty$ ,  $z$  réel, uniformément sur chaque sous-ensemble compact de  $]0, A[$ ,

$$F_{R1}(X, \lambda, z) = \frac{2^{-\nu_-}}{\sqrt{2\pi}} \left(\frac{\kappa_-}{a_-}\right)^{i\frac{(\lambda - c_-)}{\kappa_-}} \Gamma(1 - \nu_-) z^{-i\frac{(\lambda - c_-)}{\kappa_-}} e^{zX} \begin{pmatrix} 1 & O\left(\frac{1}{z}\right) \\ O\left(\frac{1}{z}\right) & 1 \end{pmatrix} [1]_z,$$



$$\begin{aligned}
 F_{R2}(X, \lambda, z) &= i \frac{2^{-\mu_-}}{\sqrt{2\pi}} \left( \frac{\kappa_-}{a_-} \right)^{-i \frac{(\lambda - c_-)}{\kappa_-}} \Gamma(1 - \mu_-) z^{i \frac{(\lambda - c_-)}{\kappa_-}} e^{zX} \begin{pmatrix} O\left(\frac{1}{z}\right) & 1 \\ -1 & O\left(\frac{1}{z}\right) \end{pmatrix} [1]_z, \\
 F_{R3}(X, \lambda, z) &= i \frac{2^{-\nu_-}}{\sqrt{2\pi}} \left( \frac{\kappa_-}{a_-} \right)^{i \frac{(\lambda - c_-)}{\kappa_-}} \Gamma(1 - \nu_-) z^{-i \frac{(\lambda - c_-)}{\kappa_-}} e^{zX} \begin{pmatrix} O\left(\frac{1}{z}\right) & 1 \\ -1 & O\left(\frac{1}{z}\right) \end{pmatrix} [1]_z, \\
 F_{R4}(X, \lambda, z) &= \frac{2^{-\mu_-}}{\sqrt{2\pi}} \left( \frac{\kappa_-}{a_-} \right)^{-i \frac{(\lambda - c_-)}{\kappa_-}} \Gamma(1 - \mu_-) z^{i \frac{(\lambda - c_-)}{\kappa_-}} e^{zX} \begin{pmatrix} 1 & O\left(\frac{1}{z}\right) \\ O\left(\frac{1}{z}\right) & 1 \end{pmatrix} [1]_z,
 \end{aligned}$$

où

$$[1]_z = 1 + O\left(\frac{1}{z}\right).$$

**Remarque 2.4.9.** *Les asymptotiques correspondantes sont également vraies pour  $z \rightarrow -\infty$  par parité/imparité.*

On commence la preuve du Théorème 2.4.6 par une estimation des noyaux de Green des équations homogènes associées aux équations satisfaites par les fonctions de Jost données dans le Lemme 2.4.1. Celle-ci est obtenue à l'aide d'estimations des fonctions de Bessel modifiées données dans [Leb65]. On sait, grâce au Lemme 2.4.1, que les composantes des fonctions Jost  $F_{Ri,j}$  vérifient les équations différentielles couplées

$$u''(X, \lambda, z) + q(X, \lambda)u(X, \lambda, z) = z^2 u(X, \lambda, z) + h_{i,j,k}(X, \lambda, z), \quad (2.4.6)$$

où lorsque  $X \rightarrow 0$ ,

$$q(X, \lambda) = \frac{\omega_-}{X^2} + q_-(X, \lambda), \quad \text{avec} \quad \omega_- = \frac{(c_- - \lambda)^2}{\kappa_-^2} - i \frac{(c_- - \lambda)}{\kappa_-},$$

et

$$q_-(X, \lambda) = O(1).$$

De plus,

$$h_{i,j,k}(X, \lambda, z) = \frac{f_{i,j,k}(X, \lambda, z)}{a(X)^2}$$

satisfait

$$h_{i,j,k}(X, \lambda, z) = O(1), \quad \text{quand} \quad X \rightarrow 0.$$

On commence par étudier l'équation homogène

$$u'' + \frac{\omega_-}{X^2} u = z^2 u \quad (2.4.7)$$

qui est une équation de Bessel. On choisit un système fondamental de solutions de (2.4.7) dépendant du bloc que l'on étudie. Pour le bloc  $F_{R1}$  on choisit  $(I_{-\nu_-}, K_{-\nu_-})$  alors que pour le bloc  $F_{R2}$  on choisit  $(I_{\nu_-}, K_{\nu_-})$ . Ainsi, pour  $F_{R1,j}$ ,  $j \in \{1, 2\}$ , on pose

$$u_{0,1j}(X) = \alpha_{1j}\sqrt{X}I_{-\nu_-}(zX) + \beta_{1j}\sqrt{X}K_{-\nu_-}(zX), \quad (2.4.8)$$

alors que pour  $F_{R2,j}$ ,  $j \in \{1, 2\}$ , on pose

$$u_{0,2j}(X) = \alpha_{2j}\sqrt{X}I_{\nu_-}(zX) + \beta_{2j}\sqrt{X}K_{\nu_-}(zX). \quad (2.4.9)$$

On résout alors l'Équation (2.4.6) par perturbation. On réécrit cette équation sous la forme

$$u'' + \frac{\omega_-}{X^2}u - z^2u = -q_-(X, \lambda)u + h_{i,j,k}(X, \lambda, z).$$

Le noyau de Green pour le bloc  $F_{R1}$  est défini par

$$G_1(t, X, z) = \sqrt{tX}(I_{-\nu_-}(zt)K_{-\nu_-}(zX) - I_{-\nu_-}(zX)K_{-\nu_-}(zt)),$$

alors que le noyau de Green pour le bloc  $F_{R2}$  est défini par

$$G_2(t, X, z) = \sqrt{tX}(I_{\nu_-}(zt)K_{\nu_-}(zX) - I_{\nu_-}(zX)K_{\nu_-}(zt)).$$

La solution générale de (2.4.6) est alors

$$u(X, \lambda, z) = u_{0,ij}(X, \lambda, z) + \int_0^X G_i(t, X, z)(q_-(t, \lambda)u(t, \lambda, z) + h_{i,j,k}(t, \lambda, z)) dt, \quad (2.4.10)$$

où le terme intégral à un sens grâce au Lemme 2.4.4. Pour prouver le Théorème 2.4.6 on a besoin des estimations des noyaux de Green  $G_1$  et  $G_2$  suivantes. La preuve de ces estimations est basée sur de bonnes estimations des fonctions de Bessel modifiées et de leur dérivées (voir [Iso04] eq. (2.17) ou [DKN14] Proposition 3.1 pour une preuve semblable).

**Proposition 2.4.10.** *Si  $|z| \geq 1$ , pour  $i \in \{1, 2\}$ , pour tout  $X \in ]0, A[$  et pour tout  $t \in ]0, X[$ ,*

$$|G_i(t, X, z)| \leq \frac{Ce^{|\operatorname{Re}(z)|(X-t)}}{(1 + |zX|^{\frac{1}{2}})(1 + |zt|^{\frac{1}{2}})}.$$

**Remarque 2.4.11.** *Il suffit de prouver la Proposition 2.4.10 pour les  $z$  tels que  $\operatorname{Re}(z) \geq 0$ . En effet, en utilisant la définition des fonctions de Bessel modifiées (2.4.3) et (2.4.4) on*

sait que

$$\begin{aligned} G_2(t, X, z) &= \frac{\pi\sqrt{tX}}{2\sin(\nu_-\pi)} [I_{\nu_-}(zt)(I_{-\nu_-}(zX) - I_{\nu_-}(zX)) \\ &\quad - I_{\nu_-}(zX)(I_{-\nu_-}(zt) - I_{\nu_-}(zt))] \\ &= \frac{\pi\sqrt{tX}}{2\sin(\nu_-\pi)} (I_{\nu_-}(zt)I_{-\nu_-}(zX) - I_{\nu_-}(zX)I_{-\nu_-}(zt)). \end{aligned}$$

Ainsi, en utilisant la définition de  $I_\nu$  donnée précédemment dans (2.4.3), on obtient que l'application  $z \mapsto G_2(t, X, z)$  est paire en la variable  $z \in \mathbb{C}$ . De même, l'application  $z \mapsto G_1(t, X, z)$  est paire en  $z \in \mathbb{C}$ .

*Démonstration.* On prouve la Proposition 2.4.10 seulement pour  $G_2$  puisque la preuve pour  $G_1$  est semblable. De plus, en utilisant la remarque précédente on a seulement besoin de faire la preuve pour  $z$  tel que  $\operatorname{Re}(z) \geq 0$ . On rappelle que

$$G_2(t, X, z) = \sqrt{tX}(I_{\nu_-}(zt)K_{\nu_-}(zX) - I_{\nu_-}(zX)K_{\nu_-}(zt)),$$

où

$$\nu_- = \frac{1}{2} - i \frac{(\lambda - c_-)}{\kappa_-}.$$

Pour obtenir l'estimation de la Proposition 2.4.10 on va utiliser les asymptotiques, données dans [Leb65], (2.4.5) et

$$K_{\nu_-}(\zeta) = \left(\frac{\pi}{2\zeta}\right)^{\frac{1}{2}} e^{-\zeta} \left(1 + O\left(\frac{1}{\zeta}\right)\right), \quad (2.4.11)$$

lorsque  $\zeta \rightarrow \infty$  et  $|\operatorname{Arg}(\zeta)| \leq \pi - \delta$ ,  $\delta > 0$ . Pour prouver la Proposition 2.4.10 il suffit de prouver le Lemme suivant (et d'échanger les rôles de  $t$  et  $X$  pour obtenir le second).

**Lemme 2.4.12.** *Si  $\operatorname{Re}(z) \geq 0$  et  $|z| \geq 1$ , alors pour tout  $X \in ]0, A[$  et pour tout  $t \in ]0, X[$ ,*

$$\sqrt{tX}|I_{\nu_-}(zt)K_{\nu_-}(zX)| \leq \frac{Ce^{-\operatorname{Re}(z)(X-t)}}{(1 + |zX|^{\frac{1}{2}})(1 + |zt|^{\frac{1}{2}})}.$$

**Lemme 2.4.13.** *Si  $\operatorname{Re}(z) \geq 0$  et  $|z| \geq 1$ , alors pour tout  $X \in ]0, A[$  et pour tout  $t \in ]0, X[$ ,*

$$\sqrt{tX}|I_{\nu_-}(zX)K_{\nu_-}(zt)| \leq \frac{Ce^{\operatorname{Re}(z)(X-t)}}{(1 + |zX|^{\frac{1}{2}})(1 + |zt|^{\frac{1}{2}})}.$$

*Démonstration.* On prouve le Lemme 2.4.12 en découpant le plan en différents secteurs :

- Si  $|zt| \leq 1$  et  $|zX| \leq 1$  :

$$\begin{aligned} \sqrt{tX}|I_{\nu_-}(zt)K_{\nu_-}(zX)| &= \frac{1}{|z|}|tz|^{\frac{1}{2}}|tX|^{\frac{1}{2}}|I_{\nu_-}(zt)K_{\nu_-}(zX)| \\ &\leq \frac{C}{|z|} \end{aligned}$$

car  $|I_{\nu_-}(zt)K_{\nu_-}(zX)|$  est borné sur un ensemble compact.

- Si  $|zt| > 1$  et  $|zX| \leq 1$  : Ce secteur est interdit puisque  $t \leq X$ .
- Si  $|zt| \leq 1$  et  $|zX| > 1$  : On sait que  $|I_{\nu_-}(zt)| \leq C$  car on est sur un ensemble compact et en utilisant l'estimation (2.4.11) on obtient

$$|K_{\nu_-}(zX)| \leq \frac{C}{|zX|^{\frac{1}{2}}} e^{-\operatorname{Re}(z)X}.$$

Ainsi,

$$\begin{aligned} \sqrt{tX}|I_{\nu_-}(zt)K_{\nu_-}(zX)| &\leq C\sqrt{t}|I_{\nu_-}(zt)K_{\nu_-}(zX)| \quad \text{car } X \leq A \\ &\leq \underbrace{C|zt|^{\frac{1}{2}}|I_{\nu_-}(zt)|}_{\leq C} \frac{|K_{\nu_-}(zX)|}{|z|^{\frac{1}{2}}} \\ &\leq \frac{Ce^{-\operatorname{Re}(z)X}}{|z|^{\frac{1}{2}}|zX|^{\frac{1}{2}}}. \end{aligned}$$

- Si  $|zt| > 1$  et  $|zX| > 1$  : En utilisant les estimations (2.4.5) et (2.4.11) on a

$$|I_{\nu_-}(zt)| \leq \frac{C}{|zt|^{\frac{1}{2}}} e^{\operatorname{Re}(z)t}$$

et

$$|K_{\nu_-}(zX)| \leq \frac{C}{|zX|^{\frac{1}{2}}} e^{-\operatorname{Re}(z)X}.$$

Ainsi,

$$\begin{aligned} \sqrt{tX}|I_{\nu_-}(zt)K_{\nu_-}(zX)| &\leq C|I_{\nu_-}(zt)K_{\nu_-}(zX)| \\ &\leq C \frac{e^{-\operatorname{Re}(z)(X-t)}}{|zt|^{\frac{1}{2}}|zX|^{\frac{1}{2}}}. \end{aligned}$$

□

□

### 2.4.3 Asymptotiques des fonctions de Jost à droite lorsque $X \rightarrow 0$

Pour prouver le Théorème 2.4.6 on a besoin des asymptotiques des fonctions de Jost à droite lorsque la variable de Liouville  $X$  tend vers 0. Ces asymptotiques nous permettent dans un second temps de trouver explicitement le terme principal des composantes des fonctions de Jost en termes des fonctions de Bessel modifiées. Pour obtenir ces asymptotiques on utilise le fait que l'on peut écrire les blocs de Faddeev comme des séries et on utilise le lien entre les matrices de Faddeev et les fonctions de Jost. On procède pour commencer à l'analyse du bloc  $F_{R1}$ .

**Lemme 2.4.14.** *Lorsque  $X \rightarrow 0$ , pour tout  $z \in \mathbb{C}$  fixé,*

$$F_{R1}(X, \lambda, z) = \left( \left( \frac{\kappa_-}{a_-} \right)^{i \left( \frac{\lambda - c_-}{\kappa_-} \right)} X^{i \left( \frac{\lambda - c_-}{\kappa_-} \right)} + O(X^2) \right) \begin{pmatrix} 1 & O(X^2) \\ O(X^2) & 1 \end{pmatrix}.$$

*Démonstration.* Grâce à (2.3.15) on sait que

$$\|\hat{M}_{R1}(x, \lambda, z) - \hat{M}_{R1}^0(x, \lambda, z)\| = O \left( \left( \int_{-\infty}^x \|k(s, z)\| ds \right)^2 \right).$$

On rappelle que

$$k(x, z) = e^{2iC^-(x)} \begin{pmatrix} -ib(x) & za(x) \\ -za(x) & ib(x) \end{pmatrix}.$$

De plus, d'après les asymptotiques données dans le Lemme 2.2.1, on a  $b(x) = O(a(x))$  lorsque  $x \rightarrow -\infty$ . Ainsi,  $\|k(x)\| \leq Ca(x)$  pour  $x \rightarrow -\infty$ . Donc, puisque  $\hat{M}_{R1}^0(x, \lambda, z) = I_2$ ,

$$\|\hat{M}_{R1}(x, \lambda, z) - I_2\| = O(X^2), \quad X \rightarrow 0.$$

Concernant  $F_{R1}$ , on sait que

$$F_{R1}(x, \lambda, z) = e^{i(\lambda x - C^-(x))} \hat{M}_{R1}(x, \lambda, z),$$

ainsi

$$\|F_{R1}(x, \lambda, z) - F_{R1}^0(x, \lambda, z)\| = O(X^2), \quad X \rightarrow 0, \quad (2.4.12)$$

où

$$F_{R1}^0(x, \lambda, z) = e^{i(\lambda x - C^-(x))} I_2. \quad (2.4.13)$$

De plus,

$$e^{i\lambda h(X)} = \left(\frac{\kappa_-}{a_-}\right)^{\frac{i\lambda}{\kappa_-}} X^{\frac{i\lambda}{\kappa_-}} + O(X^2), \quad X \rightarrow 0. \quad (2.4.14)$$

En effet, grâce aux asymptotiques du potentiel  $a$ , données dans le Lemme 2.2.1,

$$X = g(x) = \int_{-\infty}^x a(t) dt = \frac{a_-}{\kappa_-} e^{\kappa_- x} + O(e^{3\kappa_- x}), \quad x \rightarrow -\infty,$$

donc,

$$\begin{aligned} e^{i\lambda h(X)} &= e^{i\lambda \left( \frac{1}{\kappa_-} \ln \left( \frac{\kappa_-}{a_-} X \right) + O(X^2) \right)} \\ &= \left( \frac{\kappa_-}{a_-} \right)^{\frac{i\lambda}{\kappa_-}} X^{\frac{i\lambda}{\kappa_-}} (1 + O(X^2)) \\ &= \left( \frac{\kappa_-}{a_-} \right)^{\frac{i\lambda}{\kappa_-}} X^{\frac{i\lambda}{\kappa_-}} + O(X^2), \quad X \rightarrow 0. \end{aligned}$$

De plus,

$$\begin{aligned} C^-(x) &= \int_{-\infty}^x (c(s) - c_-) ds + c_- x \\ &= \int_{-\infty}^x (c_- e^{2\kappa_- s} + O(e^{4\kappa_- s})) ds + c_- x \\ &= c_- x + O(X^2), \quad X \rightarrow 0. \end{aligned}$$

Ainsi,

$$\begin{aligned} e^{i(\lambda h(X) - C^-(h(X)))} &= e^{ih(X)(\lambda - c_-)} + O(X^2) \\ &= \left( \frac{\kappa_-}{a_-} \right)^{i \left( \frac{\lambda - c_-}{\kappa_-} \right)} X^{i \left( \frac{\lambda - c_-}{\kappa_-} \right)} + O(X^2), \quad X \rightarrow 0. \end{aligned}$$

Ceci achève notre preuve grâce aux égalités (2.4.12) et (2.4.13).  $\square$

Grâce à ces estimations on peut trouver le terme principal des fonctions de Jost en termes des fonctions de Bessel modifiées. Concernant le coefficient  $F_{R1,1}$ , on doit d'abord trouver les constantes  $\alpha_{11}$  et  $\beta_{11}$  définies dans (2.4.8) pour que la solution  $u_{11}$  de l'Équation (2.4.10)

$$u_{11}(X, \lambda, z) = u_{0,11}(X, \lambda, z) + \int_0^X G_1(t, X, z)(q_-(t, \lambda)u_{11}(t, \lambda, z) + h_{1,1,3}(t, \lambda, z)) dt$$

soit  $F_{R1,1}$ . Concernant  $F_{R1,2}$  on doit trouver  $\alpha_{12}$  et  $\beta_{12}$  pour que la solution  $u_{12}$  de

(2.4.10)

$$u_{12}(X, \lambda, z) = u_{0,12}(X, \lambda, z) + \int_0^X G_1(t, X, z)(q_-(t, \lambda)u_{12}(t, \lambda, z) + h_{1,2,4}(t, \lambda, z)) dt$$

soit  $F_{R1,2}$ . En utilisant les asymptotiques de  $F_{R1,1}(X, \lambda, z)$  et  $F_{R1,2}(X, \lambda, z)$  lorsque  $X \rightarrow 0$  on prouve la Proposition suivante.

**Proposition 2.4.15.** *Pour tout  $z$  fixé, pour tout  $X \in ]0, A[$ ,*

$$\begin{aligned} F_{R1,1}(X, \lambda, z) &= F_{R1,1}^-(X, \lambda, z) \\ &+ \int_0^X G_1(t, X, z)(q_-(t, \lambda)F_{R1,1}(t, \lambda, z) + h_{1,1,3}(t, \lambda, z)) dt, \end{aligned}$$

où,

$$F_{R1,1}^-(X, \lambda, z) = \frac{z^{\nu_-}}{2^{\nu_-}} \left( \frac{\kappa_-}{a_-} \right)^{i \left( \frac{\lambda - c_-}{\kappa_-} \right)} \Gamma(1 - \nu_-) \sqrt{X} I_{-\nu_-}(zX).$$

De même,

$$F_{R1,2}(X, \lambda, z) = \int_0^X G_1(t, X, z)(q_-(t, \lambda)F_{R1,2}(t, \lambda, z) + h_{1,2,4}(t, \lambda, z)) dt.$$

*Démonstration.* On cherche  $\alpha_{11}$  et  $\beta_{11}$  tels que

$$\begin{aligned} F_{R1,1}(X, \lambda, z) &= F_{R1,1}^-(X, \lambda, z) \\ &+ \int_0^X G_1(t, X, z)(q_-(t, \lambda)F_{R1,1}(t, \lambda, z) + h_{1,1,3}(t, \lambda, z)) dt, \end{aligned}$$

où

$$F_{R1,1}^-(X, \lambda, z) = \alpha_{11} \sqrt{X} I_{-\nu_-}(zX) + \beta_{11} \sqrt{X} K_{-\nu_-}(zX).$$

On rappelle que (voir [Leb65] eqs (5.7.1) et (5.7.2)),

$$\alpha \sqrt{X} I_{-\nu_-}(zX) \sim \frac{\alpha z^{-\nu_-}}{\Gamma(1 - \nu_-) 2^{-\nu_-}} X^{i \left( \frac{\lambda - c_-}{\kappa_-} \right)}, \quad X \rightarrow 0, \quad (2.4.15)$$

et

$$\beta \sqrt{X} K_{-\nu_-}(zX) \sim \frac{-\beta \pi}{2 \sin(\nu_- \pi)} \frac{z^{\nu_-}}{\Gamma(1 + \nu_-) 2^{\nu_-}} X^{1-i \left( \frac{\lambda - c_-}{\kappa_-} \right)}, \quad X \rightarrow 0. \quad (2.4.16)$$

Ainsi, pour tout  $z \in \mathbb{C}$  fixé, lorsque  $X \rightarrow 0$ ,

$$\begin{aligned} G_1(t, X, z) &= \sqrt{tX}(I_{-\nu_-}(zt)K_{-\nu_-}(zX) - I_{-\nu_-}(zX)K_{-\nu_-}(zt)) \\ &= \sqrt{t}I_{-\nu_-}(zt)\sqrt{X}K_{-\nu_-}(zX) - \sqrt{X}I_{-\nu_-}(zX)\sqrt{t}K_{-\nu_-}(zt) \\ &\sim C_{\nu_-} \left( t^{i\left(\frac{\lambda-c_-}{\kappa_-}\right)} X^{1-i\left(\frac{\lambda-c_-}{\kappa_-}\right)} - X^{i\left(\frac{\lambda-c_-}{\kappa_-}\right)} t^{1-i\left(\frac{\lambda-c_-}{\kappa_-}\right)} \right), \end{aligned}$$

où

$$C_{\nu_-} = \frac{-\pi}{\sin(\nu_- \pi) \Gamma(1 - \nu_-) \Gamma(1 + \nu_-)}.$$

Finalement, grâce au Lemme 2.4.4,

$$\int_0^X G_1(t, X, z) \underbrace{(q_-(t)F_{R1,1}(t, \lambda, z) + h_{1,1,3}(t, \lambda, z))}_{=O(1)} dt = O(X^2), \quad X \rightarrow 0.$$

De plus, grâce au Lemme 2.4.14,

$$F_{R1,1}(X, \lambda, z) = \left(\frac{\kappa_-}{a_-}\right)^{i\left(\frac{\lambda-c_-}{\kappa_-}\right)} X^{i\left(\frac{\lambda-c_-}{\kappa_-}\right)} + O(X^2), \quad X \rightarrow 0.$$

Ceci nous permet de conclure, en utilisant à nouveau (2.4.15) et (2.4.16), que

$$\alpha_{11} = \frac{z^{\nu_-}}{2^{\nu_-}} \left(\frac{\kappa_-}{a_-}\right)^{i\left(\frac{\lambda-c_-}{\kappa_-}\right)} \Gamma(1 - \nu_-) \quad \text{et} \quad \beta_{11} = 0.$$

En utilisant le même argument on prouve également que

$$\alpha_{12} = 0 \quad \text{et} \quad \beta_{12} = 0.$$

□

On procède à la même analyse pour le bloc  $F_{R2}$ .

**Lemme 2.4.16.** *Lorsque  $X \rightarrow 0$ ,*

$$F_{R2,1}(X, \lambda, z) = \frac{b_-}{2a_- \nu_-} \left(\frac{\kappa_-}{a_-}\right)^{-i\left(\frac{\lambda-c_-}{\kappa_-}\right)} X^{1-i\left(\frac{\lambda-c_-}{\kappa_-}\right)} + O(X^3)$$

et

$$F_{R2,2}(X, \lambda, z) = iz \frac{1}{2\nu_-} \left(\frac{\kappa_-}{a_-}\right)^{-i\left(\frac{\lambda-c_-}{\kappa_-}\right)} X^{1-i\left(\frac{\lambda-c_-}{\kappa_-}\right)} + O(X^3).$$



*Démonstration.* Comme dans le cas du bloc  $F_{R1}$ , on obtient

$$\|F_{R2}(x, \lambda, z) - F_{R2}^0(x, \lambda, z)\| = O(X^3),$$

où

$$F_{R2}^0(x, \lambda, z) = ie^{-i(\lambda x + C^-(x))} \int_{-\infty}^x e^{2i\lambda(x-y)} k(y, z) dy,$$

Ainsi, on sait que

$$F_{R2,1}(x, \lambda, z) = e^{i(\lambda x - C^-(x))} \int_{-\infty}^x e^{2i(C^-(y) - \lambda y)} b(y) dy + O(X^3), \quad X \rightarrow 0.$$

Donc, en utilisant l'asymptotique (2.4.14), en la variable  $X$ , lorsque  $X \rightarrow 0$ ,

$$\begin{aligned} F_{R2,1}(X, \lambda, z) &= e^{i(\lambda h(X) - C^-(h(X)))} \int_0^X e^{2i(C^-(h(Y)) - \lambda h(Y))} \frac{b(Y)}{a(Y)} dY + O(X^3), \\ &= \frac{b_-}{a_- \left(1 - \frac{2i}{\kappa_-}(\lambda - c_-)\right)} \left(\frac{\kappa_-}{a_-}\right)^{-i\left(\frac{\lambda - c_-}{\kappa_-}\right)} X^{1-i\left(\frac{\lambda - c_-}{\kappa_-}\right)} + O(X^3). \end{aligned}$$

De même, on obtient

$$F_{R2,2}(x, \lambda, z) = iz e^{i(\lambda x - C^-(x))} \int_{-\infty}^x e^{2i(C^-(y) - \lambda y)} a(y) dy + O(X^3), \quad X \rightarrow 0.$$

Ainsi, en la variable  $X$ , lorsque  $X \rightarrow 0$ ,

$$\begin{aligned} F_{R2,2}(X, \lambda, z) &= iz e^{i(\lambda h(X) - C^-(h(X)))} \int_0^X e^{2i(C^-(h(Y)) - \lambda h(Y))} dY + O(X^3), \\ &= iz \frac{1}{1 - \frac{2i}{\kappa_-}(\lambda - c_-)} \left(\frac{\kappa_-}{a_-}\right)^{-i\left(\frac{\lambda - c_-}{\kappa_-}\right)} X^{1-i\left(\frac{\lambda - c_-}{\kappa_-}\right)} + O(X^3). \end{aligned}$$

□

La méthode que l'on utilise maintenant est la même que celle utilisée précédemment pour le bloc  $F_{R1}$ . On commence donc par trouver  $\alpha_{21}$  et  $\beta_{21}$  tels que la solution  $u_{21}$  de l'Équation (2.4.10)

$$u_{21}(X) = u_{0,21}(X) + \int_0^X G_2(t, X, z)(q_-(t)u_{21}(t) + h_{2,1}(t, \lambda, z)) dt$$

soit  $F_{R2,1}$  et  $\alpha_{22}$  et  $\beta_{22}$  tels que la solution  $u_{22}$  de l'Équation (2.4.10)

$$u_{22}(X) = u_{0,22}(X) + \int_0^X G_2(t, X, z)(q_-(t)u_{22}(t) + h_{2,2}(t, \lambda, z)) dt$$

soit  $F_{R2,2}$ . L'analogie de la Proposition 2.4.15 pour le second bloc est alors la Proposition suivante.

**Proposition 2.4.17.** *Pour tout  $z$  fixé et pour tout  $X \in ]0, A[$ ,*

$$\begin{aligned} F_{R2,1}(X, \lambda, z) &= F_{R2,1}^-(X, \lambda, z) \\ &+ \int_0^X G_2(t, X, z)(q_-(t, \lambda)F_{R2,1}(t, \lambda, z) + h_{2,1,3}(t, \lambda, z)) dt, \end{aligned}$$

où

$$F_{R2,1}^-(X, \lambda, z) = \frac{b_-}{2a_-} \left(\frac{z}{2}\right)^{-\nu_-} \left(\frac{\kappa_-}{a_-}\right)^{-i\left(\frac{\lambda-c_-}{\kappa_-}\right)} \Gamma(1 - \mu_-) \sqrt{X} I_{\nu_-}(zX).$$

De même,

$$\begin{aligned} F_{R2,2}(X, \lambda, z) &= F_{R2,2}^-(X, \lambda, z) \\ &+ \int_0^X G_2(t, X, z)(q_-(t, \lambda)F_{R2,2}(t, \lambda, z) + h_{2,2,4}(t, \lambda, z)) dt, \end{aligned}$$

où

$$F_{R2,2}^-(X, \lambda, z) = i \left(\frac{z}{2}\right)^{\mu_-} \left(\frac{\kappa_-}{a_-}\right)^{-i\left(\frac{\lambda-c_-}{\kappa_-}\right)} \Gamma(1 - \mu_-) \sqrt{X} I_{\nu_-}(zX).$$

*Démonstration.* On commence par traiter  $F_{R2,1}$ . Comme dans la preuve de la Proposition 2.4.15,

$$\int_0^X G_2(t, X, z)(q_-(t)F_{R2,1}(t, \lambda, z) + h_{2,1}(t, \lambda, z)) dt = O(X^2), \quad X \rightarrow 0.$$

Ainsi, en utilisant le Lemme 2.4.16 et les estimations,

$$\alpha \sqrt{X} I_{\nu_-}(zX) \sim \frac{\alpha z^{\nu_-}}{\Gamma(1 + \nu_-) 2^{\nu_-}} X^{1-i\left(\frac{\lambda-c_-}{\kappa_-}\right)}, \quad X \rightarrow 0,$$

et

$$\beta \sqrt{X} K_{\nu_-}(zX) \sim \frac{\beta \pi}{2 \sin(\nu_- \pi)} \frac{z^{-\nu_-}}{\Gamma(1 - \nu_-) 2^{-\nu_-}} X^{i\left(\frac{\lambda-c_-}{\kappa_-}\right)}, \quad X \rightarrow 0,$$

on conclut que

$$\alpha_{21} = \frac{b_-}{2a_-} \left(\frac{z}{2}\right)^{-\nu_-} \left(\frac{\kappa_-}{a_-}\right)^{-i\left(\frac{\lambda-c_-}{\kappa_-}\right)} \frac{\Gamma(1 + \nu_-)}{\nu_-} \quad \text{et} \quad \beta_{21} = 0.$$

De même, on trouve que

$$\alpha_{22} = i \left( \frac{z}{2} \right)^{\mu_-} \left( \frac{\kappa_-}{a_-} \right)^{-i \left( \frac{\lambda_- c_-}{\kappa_-} \right)} \frac{\Gamma(1 + \nu_-)}{\nu_-} \quad \text{et} \quad \beta_{22} = 0.$$

On achève finalement la preuve en utilisant la relation  $\Gamma(1 + \nu_-) = \nu_- \Gamma(\nu_-)$  et l'égalité  $\nu_- = 1 - \mu_-$ .  $\square$

#### 2.4.4 Amélioration des estimations des fonctions de Jost

Pour obtenir les asymptotiques des fonctions de Jost à droite (respectivement à gauche) pour  $z$  grand dans le plan complexe (voir la partie suivante) on a besoin d'estimations sur ces fonctions de la forme

$$|F_{Ri,j}(X, \lambda, z)| \leq C e^{|\operatorname{Re}(z)|X}, \quad |F_{Li,j}(X, \lambda, z)| \leq C e^{|\operatorname{Re}(z)|(A-X)},$$

pour tout  $(i, j) \in \{1, 2, 3, 4\}^2$  et pour tout  $z \in \mathbb{C}$  uniformément pour  $X \in ]0, X_1[$  (respectivement  $X \in ]X_1, A[$ ),  $X_1 \in ]0, A[$  étant fixé. Pour le moment, grâce au Lemme 2.3.2 et au lien entre les matrices de Faddeev et les fonctions de Jost données par (2.3.17), on sait que,

$$|F_{Ri,j}(X, \lambda, z)| \leq C e^{|z|X}, \quad |F_{Li,j}(X, \lambda, z)| \leq C e^{|z|(A-X)}, \quad \forall (i, j) \in \{1, 2, 3, 4\}^2,$$

pour tout  $z \in \mathbb{C}$  uniformément pour  $X \in ]0, X_1[$  (respectivement  $X \in ]X_1, A[$ ). Ces estimations ne sont cependant pas suffisantes pour notre propos. En utilisant le Théorème de Phragmén-Lindelöf, on observe qu'il est suffisant de montrer que les composantes des fonctions de Jost sont bornées sur  $i\mathbb{R}$  pour obtenir les estimations voulues à partir de ces dernières. Nous allons maintenant prouver ce fait. On commence par noter que les équations scalaires obtenues sur les composantes des fonctions de Jost en la variable  $X$  dans le Lemme 2.4.1 sont couplées à cause de la forme du reste  $h_{i,j,k}$ . On transforme ainsi chacune de ces équations scalaires couplées en une équation vectorielle et on les étudie par perturbation en utilisant une méthode itérative.

**Lemme 2.4.18.** *Pour tout  $(i, j) \in \{1, 2, 3, 4\}^2$  et pour tout  $X_1 \in ]0, A[$  la fonction  $z \mapsto F_{Ri,j}(X, \lambda, z)$  est bornée sur  $i\mathbb{R}$  uniformément pour  $X \in ]0, X_1[$  et la fonction  $z \mapsto F_{Li,j}(X, \lambda, z)$  est bornée sur  $i\mathbb{R}$  uniformément pour  $X \in ]X_1, A[$ .*

*Démonstration.* Puisque les preuves sont similaires dans les autres cas, on donne seulement la preuve pour le couple  $(F_{R1,1}, F_{R1,3})$ . On part des équations scalaires d'ordre deux

données dans le Lemme 2.4.1 :

$$F''_{R1,1}(X, \lambda, z) + q(X, \lambda)F_{R1,1}(x, \lambda, z) = z^2 F_{R1,1}(X, \lambda, z) + h_{1,1,3}(X, \lambda, z),$$

$$F''_{R1,3}(X, \lambda, z) + q(X, \lambda)F_{R1,3}(x, \lambda, z) = z^2 F_{R1,3}(X, \lambda, z) + h_{1,3,1}(X, \lambda, z),$$

où (voir les Lemmes 2.3.5 et 2.4.1, l'Équation (2.3.19) et le Lemme 2.4.4)

$$\begin{aligned} h_{1,1,3}(X, \lambda, z) &= c_1(X, \lambda, z)F'_{R1,1}(X, \lambda, z) + c_2(X, \lambda, z)F'_{R1,3}(X, \lambda, z) \\ &\quad + c_3(X, \lambda, z)F_{R1,1}(X, \lambda, z) + c_4(X, \lambda, z)F_{R1,3}(X, \lambda, z), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} h_{1,3,1}(X, \lambda, z) &= c_1(X, \lambda, z)F'_{R1,3}(X, \lambda, z) + c_2(X, \lambda, z)F'_{R1,1}(X, \lambda, z) \\ &\quad + c_3(X, \lambda, z)F_{R1,3}(X, \lambda, z) + c_4(X, \lambda, z)F_{R1,1}(X, \lambda, z), \end{aligned}$$

et les fonctions  $c_i$  sont données dans la preuve du Lemme 2.3.5 (voir (2.3.20)). On sait que, lorsque  $X \rightarrow 0$ ,

$$c_i(X, \lambda, z) = O(X), \quad \forall i \in \{1, 2\}, \quad c_i(X, \lambda, z) = O(1), \quad \forall i \in \{3, 4\}, \quad (2.4.17)$$

et lorsque  $z \rightarrow \infty$  dans le plan complexe

$$c_i(X, \lambda, z) = O\left(\frac{1}{z}\right), \quad \forall i \in \{1, 2, 3, 4\}. \quad (2.4.18)$$

On transforme à présent cette paire d'équations scalaires du second ordre en une équation vectorielle du premier ordre. On pose,

$$U(X, \lambda, z) = \begin{pmatrix} F_{R1,1}(X, \lambda, z) \\ F_{R1,3}(X, \lambda, z) \\ F'_{R1,1}(X, \lambda, z) \\ F'_{R1,3}(X, \lambda, z) \end{pmatrix},$$

et on obtient

$$U'(X, \lambda, z) = A(X, \lambda, z)U(X, \lambda, z) + B(X, \lambda, z)U(X, \lambda, z),$$

où

$$A(X, \lambda, z) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ z^2 - \frac{\omega_-}{X^2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & z^2 - \frac{\omega_-}{X^2} & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

et

$$B(X, \lambda, z) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ c_3 - q_- & c_4 & c_1 & c_2 \\ c_4 & c_3 - q_- & c_2 & c_1 \end{pmatrix}.$$

On utilise la notation

$$U(X, \lambda, z) = \begin{pmatrix} U_1(X, \lambda, z) \\ U_2(X, \lambda, z) \\ U_3(X, \lambda, z) \\ U_4(X, \lambda, z) \end{pmatrix}$$

et on commence par étudier l'équation homogène

$$U'(X, \lambda, z) = A(X, \lambda, z)U(X, \lambda, z).$$

On note que cette équation est équivalente à la paire d'équations de Bessel modifiées

$$U_1''(X, \lambda, z) + \frac{\omega_-}{X^2}U_1(X, \lambda, z) = z^2U_1(X, \lambda, z),$$

$$U_3''(X, \lambda, z) + \frac{\omega_-}{X^2}U_3(X, \lambda, z) = z^2U_3(X, \lambda, z).$$

Comme base de l'espace de solutions de ces équations scalaires on choisit

$$(\sqrt{X}I_{\nu_-}(zX), \sqrt{X}I_{-\nu_-}(zX)), \quad (\nu_- \notin \mathbb{Z}).$$

Dans la suite de la preuve on pose, dans un soucis de clarté,  $f_\nu = \sqrt{X}I_{\nu_-}(zX)$  et  $g_\nu = \sqrt{X}I_{-\nu_-}(zX)$ . On peut ainsi choisir la base formée des quatre vecteurs

$$V_1 = \begin{pmatrix} f_\nu \\ 0 \\ f'_\nu \\ 0 \end{pmatrix}, \quad V_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ f_\nu \\ 0 \\ f'_\nu \end{pmatrix}, \quad V_3 = \begin{pmatrix} g_\nu \\ 0 \\ g'_\nu \\ 0 \end{pmatrix}, \quad V_4 = \begin{pmatrix} 0 \\ g_\nu \\ 0 \\ g'_\nu \end{pmatrix}$$

et on désigne par  $C(X, \lambda, z)$  la matrice dont la  $i$ -ème colonne est  $V_i$ . En utilisant les

propriétés du Wronskien de deux fonctions de Bessel modifiées (voir [Leb65]), on peut prouver le Lemme suivant.

**Lemme 2.4.19.**

$$\det(C(X, \lambda, z)) = W(f_\nu, g_\nu)^2 = \frac{4 \sin(\nu\pi)^2}{\pi^2} =: \Delta.$$

On étudie maintenant l'équation inhomogène. On écrit la solution de l'équation homogène sous la forme

$$U_0(X, \lambda, z) = \begin{pmatrix} \alpha_1 f_\nu + \beta_1 g_\nu \\ \alpha_3 f_\nu + \beta_3 g_\nu \\ \alpha_1 f'_\nu + \beta_1 g'_\nu \\ \alpha_3 f'_\nu + \beta_3 g'_\nu \end{pmatrix},$$

où  $\alpha_i$  et  $\beta_i$ ,  $i \in \{1, 3\}$  sont choisis de telle sorte que les fonctions de Jost vérifient les asymptotiques prescrites lorsque  $X \rightarrow 0$ . On utilise à présente la formule de Duhamel généralisée

$$U(X, \lambda, z) = U_0(X, \lambda, z) + \int_0^X R(X, t, \lambda, z) B(t, \lambda, z) U(t, \lambda, z) dt,$$

où  $R(X, t, \lambda, z)$  est la résolvante du problème homogène pour  $t \in ]0, X[$ . On peut écrire  $R(X, t, \lambda, z) = C(X, \lambda, z) C(t, \lambda, z)^{-1}$  et on obtient

$$\begin{aligned} U(X, \lambda, z) &= U_0(X, \lambda, z) \\ &+ C(X, \lambda, z) \int_0^X C(t, \lambda, z)^{-1} B(t, \lambda, z) U(t, \lambda, z) dt. \end{aligned} \quad (2.4.19)$$

Le terme intégral a du sens grâce aux asymptotiques connues des fonctions de Jost à droite et de leur dérivées lorsque  $X \rightarrow 0$ , aux bonnes estimations des fonctions  $c_i$  données par (2.4.17) et à la formule (2.4.3). Nous allons utiliser une méthode itérative pour résoudre cette équation intégrale. On définit

$$U^0(X, \lambda, z) = U_0(X, \lambda, z),$$

et, pour tout  $k \in \mathbb{N}$ ,

$$U^{k+1}(X, \lambda, z) = C(X, \lambda, z) \int_0^X C(t, \lambda, z)^{-1} B(t, \lambda, z) U^k(t, \lambda, z) dt. \quad (2.4.20)$$

Notre but est maintenant de prouver le Lemme suivant.

**Lemme 2.4.20.** *Pour tout  $X_1 \in ]0, A[$  il existe une constante  $C \in \mathbb{R}$  telle que pour tout  $X \in ]0, X_1[$  et pour de grands nombres complexes  $z$  imaginaires purs on a*

$$|U_i^k(X, \lambda, z)| \leq \alpha_k \frac{5^k C^{3k+1}}{|\Delta|^k} X^{2k}, \quad i \in \{1, 2\},$$

$$|U_i^k(X, \lambda, z)| \leq \alpha_k \frac{5^k C^{3k+1} |z|}{|\Delta|^k} X^{2k-1}, \quad i \in \{3, 4\},$$

où

$$\alpha_0 = 1 \quad \text{et} \quad \alpha_{k+1} = \left( \frac{1}{2k+1} + \frac{1}{2k+2} \right) \alpha_k, \quad \forall k \in \mathbb{N}.$$

*Démonstration.* On commence la preuve par le cas  $k = 0$ . Grâce à l'estimation (2.4.5) et à la formule (2.4.3) on sait que pour tout  $X_0 \in ]0, A[$  il existe une constante  $C \in \mathbb{R}$  telle que pour tout  $X \in ]0, X_1[$  et pour de grands  $z = iy$ ,  $y \in \mathbb{R}$  :

$$|f_\nu(X, \lambda, z)| \leq \frac{CX}{|z|^{\frac{1}{2}}}, \quad |g_\nu(X, \lambda, z)| \leq \frac{C}{|z|^{\frac{1}{2}}}, \quad (2.4.21)$$

$$|f'_\nu(X, \lambda, z)| \leq C|z|^{\frac{1}{2}}, \quad |g'_\nu(X, \lambda, z)| \leq \frac{C|z|^{\frac{1}{2}}}{X}. \quad (2.4.22)$$

On rappelle que

$$U^0(X, \lambda, z) = \begin{pmatrix} \alpha_1 f_\nu + \beta_1 g_\nu \\ \alpha_3 f_\nu + \beta_3 g_\nu \\ \alpha_1 f'_\nu + \beta_1 g'_\nu \\ \alpha_3 f'_\nu + \beta_3 g'_\nu \end{pmatrix}.$$

On sait que les constantes  $\alpha_i$  et  $\beta_i$  ne dépendent pas de  $X$  mais dépendent de  $z$ . En effet, grâce au Lemme 2.4.15, on a

$$\alpha_1 = \alpha_3 = \beta_3 = 0, \quad \beta_1 = \left( \frac{z}{2} \right)^{\nu_-} \left( \frac{\kappa_-}{a_-} \right)^{i \left( \frac{\lambda - c_-}{\kappa_-} \right)} \Gamma(1 - \nu_-).$$

Ainsi, en utilisant les estimations (2.4.21) et (2.4.22), on obtient la preuve du Lemme 2.4.20 dans le cas  $k = 0$ .

On suppose maintenant que le résultat est vrai pour un entier  $k$  et on prouve le Lemme seulement pour les première et troisième composantes car l'étude est la même pour les deux autres. Grâce à (2.4.20) on sait que (dans un souci de simplicité on omet les

paramètres des fonctions),

$$\begin{aligned} U_1^{k+1}(X, \lambda, z)\Delta &= -f_\nu \int_0^X g_\nu((c_3 - q_-)U_1^k + c_4U_2^k + c_1U_3^k + c_2U_4^k) dt \\ &\quad + g_\nu \int_0^X f_\nu((c_3 - q_-)U_1^k + c_4U_2^k + c_1U_3^k + c_2U_4^k) dt \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} U_3^{k+1}(X, \lambda, z)\Delta &= -f'_\nu \int_0^X g_\nu((c_3 - q_-)U_1^k + c_4U_2^k + c_1U_3^k + c_2U_4^k) dt \\ &\quad + g'_\nu \int_0^X f_\nu((c_3 - q_-)U_1^k + c_4U_2^k + c_1U_3^k + c_2U_4^k) dt. \end{aligned}$$

En utilisant l'hypothèse de récurrence, on peut estimer les termes intégrales. En effet,

$$\left| \int_0^X g_\nu((c_3 - q_-)U_1^k + c_4U_2^k + c_1U_3^k + c_2U_4^k) dt \right| \leq 5C^2 \alpha_k \frac{5^k C^{3k+1}}{|\Delta|^k} \frac{X^{2k+1}}{2k+1}$$

et

$$\left| \int_0^X f_\nu((c_3 - q_-)U_1^k + c_4U_2^k + c_1U_3^k + c_2U_4^k) dt \right| \leq 5C^2 \alpha_k \frac{5^k C^{3k+1}}{|\Delta|^k} \frac{X^{2k+2}}{2k+2}.$$

Ainsi, en utilisant les estimations (2.4.21) et (2.4.22), on obtient que :

$$|\Delta|U_1^{k+1}(X, \lambda, z) \leq \frac{5^{k+1}C^{3(k+1)+1}}{|\Delta|^k} \alpha_{k+1} X^{2(k+1)}$$

et

$$|\Delta|U_3^{k+1}(X, \lambda, z) \leq \frac{5^{k+1}C^{3(k+1)+1}|z|}{|\Delta|^k} \alpha_{k+1} X^{2(k+1)-1}.$$

Ceci achève la preuve du Lemme. □

Pour utiliser une méthode itérative on doit obtenir un résultat de sommabilité sur le terme

$$\frac{5^k C^{3k+1}}{|\Delta|^k} \alpha_k X^{2k},$$

qui est donné par le Lemme suivant.

**Lemme 2.4.21.**

$$\alpha_k \leq \frac{3^k}{(2k-1)!!},$$

où  $(2k-1)!!$  est le produit des entiers impairs inférieurs à  $2k-1$ .



*Démonstration.* Il suffit de noter que

$$\alpha_k = \prod_{j=1}^k \frac{4j-1}{2j(2j-1)} \leq \prod_{j=1}^k \left( \frac{2}{2j-1} + \frac{1}{(2j-1)^2} \right) \leq \prod_{j=1}^k \frac{3}{2j-1} = \frac{3^k}{(2k-1)!!}.$$

□

Grâce aux Lemmes 2.4.20 et 2.4.21 on obtient que pour tout  $X_1 \in ]0, A[$ , il existe une constante  $C \in \mathbb{R}$  telle que pour tout  $X \in ]0, X_1[$  et pour de grands nombres complexes imaginaires purs  $z$  on a, pour  $i \in \{1, 2\}$ ,

$$\left| \sum_{k \geq 0} U_i^k(X, \lambda, z) \right| \leq \sum_{k \geq 0} \alpha_k \frac{5^k C^{3k+1}}{|\Delta|^k} X^{2k} \leq \sum_{k \geq 0} \frac{\left( \frac{15}{|\Delta|} \right)^k C^{3k+1} X^{2k}}{(2k-1)!!} < +\infty$$

et, pour  $i \in \{3, 4\}$ ,

$$\left| \sum_{k \geq 0} U_i^k(X, \lambda, z) \right| \leq \sum_{k \geq 0} \frac{\left( \frac{15}{|\Delta|} \right)^k C^{3k+1} |z| X^{2k-1}}{(2k-1)!!} < +\infty.$$

On pose alors

$$U(X, \lambda, z) = \sum_{k \geq 0} U^k(X, \lambda, z),$$

qui est la solution de l'équation intégrale. On rappelle que

$$U_1(X, \lambda, z) = F_{R1,1}(X, \lambda, z), \quad U_2(X, \lambda, z) = F_{R1,3}(X, \lambda, z),$$

et on note que l'on a montré que pour tout  $X_1 \in ]0, A[$ , les fonctions  $F_{R1,1}$  et  $F_{R1,3}$  sont bornées pour  $z \in i\mathbb{R}$  grand, uniformément en  $X \in ]0, X_1[$ . Puisque les fonctions de Jost sont continues en  $z$ , on conclut que  $F_{R1,1}$  et  $F_{R1,3}$  sont bornées sur  $i\mathbb{R}$  uniformément en  $X \in ]0, X_1[$ . □

**Théoreme 2.4.22.** *Pour tout  $X_1 \in ]0, A[$ , il existe une constante  $C$  telle que pour tout  $X \in ]0, X_1[$  et pour tout  $z$  dans le plan complexe, pour tout  $(i, j) \in \{1, 2, 3, 4\}^2$ ,*

$$|F_{Ri,j}(X, \lambda, z)| \leq C e^{|\operatorname{Re}(z)|X}, \quad |F'_{Ri,j}(X, \lambda, z)| \leq \frac{C|z|}{X} e^{|\operatorname{Re}(z)|X}.$$

*Pour tout  $X_1 \in ]0, A[$ , il existe une constante  $C$  telle que pour tout  $X \in ]X_1, A[$  et pour*

## 2.4. Asymptotiques en le moment angulaire

---

tout  $z$  dans le plan complexe, pour tout  $(i, j) \in \{1, 2, 3, 4\}^2$ ,

$$|F_{Li,j}(X, \lambda, z)| \leq C e^{|\operatorname{Re}(z)|(A-X)}, \quad |F'_{Li,j}(X, \lambda, z)| \leq \frac{C|z|}{A-X} e^{|\operatorname{Re}(z)|(A-X)}.$$

*Démonstration.* Concernant les fonctions de Jost à droite, grâce au Lemme 2.3.2, on sait que

$$|F_{Ri,j}(X, \lambda, z)| \leq C e^{|z|X}, \quad \forall (i, j) \in \{1, 2, 3, 4\}^2.$$

De plus, grâce au Lemme 2.4.18 on sait que

$$|F_{Ri,j}(X, \lambda, z)| \leq C, \quad \forall z \in i\mathbb{R}, \quad \forall (i, j) \in \{1, 2, 3, 4\}^2.$$

Ainsi, les fonctions de Jost étant entières (voir Section 2.5), en utilisant le Théorème de Phragmén-Lindelöf (voir [Boa54], Theorem 1.4.2) on conclut que la première estimation du Théorème 2.4.22 est vérifiée. La même preuve est valide pour les fonctions de Jost à gauche.

Pour prouver l'estimation sur les dérivées des fonctions de Jost on rappelle simplement que ces fonctions vérifient l'Equation (2.3.3) et on conclut en utilisant les estimations obtenues précédemment sur les fonctions de Jost.  $\square$

**Corollaire 2.4.23.** *Pour tout  $X_1 \in ]0, A[$ , il existe une constante  $C$  telle que pour tout  $X \in ]0, X_1[$  et pour tout  $z$  dans le plan complexe, pour tout  $i \in \{1, 2, 3, 4\}$ ,*

$$|h_{i,j,k}(X, \lambda, z)| \leq C e^{|\operatorname{Re}(z)|X}, \quad \forall (j, k) \in \{(1, 3), (2, 4), (3, 1), (4, 2)\}.$$

*Démonstration.* On prouve seulement que  $h_{1,1,3}(X, \lambda, z)$  vérifie l'estimation voulue puisque les autres cas sont similaires. On rappelle que

$$\begin{aligned} h_{1,1,3}(X, \lambda, z) &= c_1(X, \lambda, z)F'_{R1,1}(X, \lambda, z) + c_2(X, \lambda, z)F'_{R1,3}(X, \lambda, z) \\ &\quad + c_3(X, \lambda, z)F_{R1,1}(X, \lambda, z) + c_4(X, \lambda, z)F_{R1,3}(X, \lambda, z), \end{aligned}$$

où les fonctions  $c_i$  satisfont (2.4.17) et (2.4.18). Donc, grâce au Théorème 2.4.22, on obtient l'estimation voulue.  $\square$

### 2.4.5 Asymptotiques des fonctions de Jost à droite pour $z$ grand dans le plan complexe

On commence par étudier le premier bloc. Puisque les autres coefficients peuvent être traité en utilisant le même argument, on donne seulement la preuve du Théorème 2.4.6

pour les coefficients  $F_{R1,1}$  et  $F_{R1,2}$ . On prouve ainsi la Proposition suivante.

**Proposition 2.4.24.** *Pour tout  $X_1 \in ]0, A[$ , il existe une constante  $C$  telle que pour  $z$  grand dans le plan complexe et pour tout  $X \in ]0, X_1[$ ,*

$$|F_{R1,1}(X, \lambda, z) - \alpha_{11} \sqrt{X} I_{-\nu_-}(zX)| \leq C \frac{e^{|\operatorname{Re}(z)|X}}{|z|}$$

et

$$F_{R1,2}(X, \lambda, z) = O\left(\frac{e^{|\operatorname{Re}(z)|X}}{|z|}\right).$$

**Remarque 2.4.25.** *Puisque*

$$I_\nu(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\left(\frac{z}{2}\right)^{\nu+2k}}{\Gamma(k+\nu+1)k!}, \quad |z| < \infty, \quad |\arg(z)| < \pi$$

et

$$\alpha_{11} = \frac{z^{\nu_-}}{2^{\nu_-}} \left(\frac{\kappa_-}{a_-}\right)^{i\left(\frac{\lambda-c_-}{\kappa_-}\right)} \Gamma(1-\nu_-),$$

il n'y a pas de problème pour étendre la fonction  $z \mapsto \alpha_{11} \sqrt{X} I_{-\nu_-}(zX)$  à  $\mathbb{R}^-$  par symétrie puisque cette fonction est paire. On s'attendait à obtenir ces symétries pour  $z$  grand puisque dans le cas sans masse la première fonction de Jost à droite est paire.

*Démonstration.* Grâce à la Proposition 2.4.15, on sait que

$$\begin{aligned} F_{R1,1}(X, \lambda, z) &= \alpha_{11} \sqrt{X} I_{-\nu_-}(zX) \\ &+ \int_0^X G_1(t, X, z) (q_-(t, \lambda) F_{R1,1}(X, \lambda, z) + h_{1,1,3}(t, \lambda, z)) dt, \end{aligned}$$

où

$$\alpha_{11} = \frac{z^{\nu_-}}{2^{\nu_-}} \left(\frac{\kappa_-}{a_-}\right)^{i\left(\frac{\lambda-c_-}{\kappa_-}\right)} \Gamma(1-\nu_-) \quad \text{et} \quad \nu_- = \frac{1}{2} - i \frac{(\lambda - c_-)}{\kappa_-}.$$

En utilisant la Proposition 2.4.10 et le Théorème 2.4.22 on obtient que pour tout  $X_1 \in ]0, A[$  il existe une constante  $C$  telle que pour  $z$  grand dans le plan complexe et pour tout  $X \in ]0, X_1[$ ,

$$\begin{aligned} \left| \int_0^X G_1(t, X, z) q_-(t, \lambda) F_{R1,1}(X, \lambda, z) dt \right| &\leq C \frac{e^{|\operatorname{Re}(z)|X}}{1 + |zX|^{\frac{1}{2}}} \int_0^X \frac{1}{1 + |zt|^{\frac{1}{2}}} dt \\ &\leq C \frac{e^{|\operatorname{Re}(z)|X}}{|z|}. \end{aligned}$$

Ainsi, pour tout  $X_1 \in ]0, A[$  il existe une constante  $C$  telle que pour  $z$  grand dans le plan complexe et pour tout  $X \in ]0, X_1[$ ,

$$\left| F_{R1,1}(X, \lambda, z) - \alpha_{11} \sqrt{X} I_{-\nu_-}(zX) - \int_0^X G_1(t, X, z) h_{1,1,3}(t, \lambda, z) dt \right| \leq C \frac{e^{|\operatorname{Re}(z)|X}}{|z|}.$$

De plus, grâce à la Proposition 2.4.10 et au Corollaire 2.4.23 on sait que, pour  $z$  grand dans le plan complexe

$$\left| \int_0^X G_1(t, X, z) h_{1,1,3}(t, \lambda, z) dt \right| \leq C \frac{e^{|\operatorname{Re}(z)|X}}{|z|}, \quad \forall X \in ]0, X_1[.$$

On conclut alors que, pour tout  $X_1 \in ]0, A[$ , il existe une constante  $C$  telle que pour  $z$  grand dans le plan complexe,

$$|F_{R1,1}(X, \lambda, z) - \alpha_{11} \sqrt{X} I_{-\nu_-}(zX)| \leq C \frac{e^{|\operatorname{Re}(z)|X}}{|z|}, \quad \forall X \in ]0, X_1[.$$

Par le même argument on obtient que pour tout  $X_1 \in ]0, A[$  il existe une constante  $C$  telle que pour  $z$  grand dans le plan complexe,

$$|F_{R1,2}(X, \lambda, z)| \leq C \frac{e^{|\operatorname{Re}(z)|X}}{|z|}, \quad \forall X \in ]0, X_1[.$$

□

Concernant le second bloc on démontre la Proposition suivante.

**Proposition 2.4.26.** *Pour tout  $X_1 \in ]0, A[$  il existe une constante  $C$  telle que pour  $z$  grand dans le plan complexe*

$$|F_{R2,1}(X, \lambda, z)| = C \frac{e^{|\operatorname{Re}(z)|X}}{|z|}, \quad \forall X \in ]0, X_1[$$

et

$$|F_{R2,2}(X, \lambda, z) - \alpha_{22} \sqrt{X} I_{\nu_-}(zX)| \leq C \frac{e^{|\operatorname{Re}(z)|X}}{|z|}, \quad \forall X \in ]0, X_1[.$$

**Remarque 2.4.27.** *Puisque*

$$I_\nu(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\left(\frac{z}{2}\right)^{\nu+2k}}{\Gamma(k+\nu+1)k!}, \quad |z| < \infty, \quad |\arg(z)| < \pi,$$

$$\alpha_{21} = \frac{b_-}{2a_-} \left(\frac{z}{2}\right)^{-\nu_-} \left(\frac{\kappa_-}{a_-}\right)^{-i\left(\frac{\lambda-c_-}{\kappa_-}\right)} \frac{\Gamma(1+\nu_-)}{\nu_-}$$

et

$$\alpha_{22} = i \frac{z}{2} \left(\frac{z}{2}\right)^{-\nu_-} \left(\frac{\kappa_-}{a_-}\right)^{-i\left(\frac{\lambda-c_-}{\kappa_-}\right)} \frac{\Gamma(1+\nu_-)}{\nu_-}.$$

il n'y a pas de problème pour étendre les fonctions  $z \mapsto \alpha_{21}\sqrt{X}I_{\nu_-}(zX)$  et  $z \mapsto \alpha_{22}\sqrt{X}I_{\nu_-}(zX)$  à  $\mathbb{R}^-$  par symétrie puisque ces fonctions ont des propriétés de parités. On note que la fonction  $z \mapsto \alpha_{22}\sqrt{X}I_{\nu_-}(zX)$  est impaire. On pouvait s'attendre à obtenir cette symétrie pour  $z$  grand puisque dans le cas sans masse, la seconde composante de la fonction de Jost à droite est impaire.

*Démonstration.* Grâce à la Proposition 2.4.17 on sait que,

$$\begin{aligned} F_{R2,1}(X, \lambda, z) &= \alpha_{21}\sqrt{X}I_{\nu_-}(zX) \\ &+ \int_0^X G_2(t, X, z)(q_-(t)F_{R2,1}(X, \lambda, z) + h_{2,1}(t, \lambda, z)) dt, \end{aligned}$$

où

$$\alpha_{21} = \frac{b_-}{2a_-} \left(\frac{z}{2}\right)^{-\nu_-} \left(\frac{\kappa_-}{a_-}\right)^{-i\left(\frac{\lambda-c_-}{\kappa_-}\right)} \Gamma(1-\mu_-) \quad \text{et} \quad \nu_- = \frac{1}{2} - i\frac{(\lambda-c_-)}{\kappa_-}.$$

En procédant comme dans la preuve de la Proposition 2.4.24, on obtient alors, grâce à la Proposition 2.4.10, à l'asymptotique (2.4.5) et au Corollaire 2.4.23, que pour tout  $X_1 \in ]0, A[$ , il existe une constante  $C$  telle que pour  $z$  grand dans le plan complexe et pour tout  $X \in ]0, X_1[$ ,

$$|F_{R2,1}(X, \lambda, z)| \leq C \frac{e^{|\operatorname{Re}(z)|X}}{|z|}.$$

Concernant  $F_{R2,2}$ , on sait, grâce à la Proposition 2.4.17, que

$$\begin{aligned} F_{R2,2}(X, \lambda, z) &= \alpha_{22}\sqrt{X}I_{\nu_-}(zX) \\ &+ \int_0^X G_2(t, X, z)(q_-(t)F_{R2,2}(X, \lambda, z) + h_{2,2}(t, \lambda, z)) dt, \end{aligned}$$

où

$$\alpha_{22} = i \left(\frac{z}{2}\right)^{\mu_-} \left(\frac{\kappa_-}{a_-}\right)^{-i\left(\frac{\lambda-c_-}{\kappa_-}\right)} \Gamma(1-\mu_-) \quad \text{et} \quad \mu_- = \frac{1}{2} + i\frac{(\lambda-c_-)}{\kappa_-}.$$

Ainsi, toujours en suivant la même méthode, on obtient que pour tout  $X_1 \in ]0, A[$ , il existe

une constante  $C$  telle que pour  $z$  grand dans le plan complexe et pour tout  $X \in ]0, X_1[$ ,

$$\left| F_{R2,2}(X, \lambda, z) - \alpha_{22} \sqrt{X} I_{\nu_-}(zX) - \int_0^X G_2(t, X, z) h_{2,2}(t, \lambda, z) dt \right| \leq C \frac{e^{|\operatorname{Re}(z)|X}}{|z|}.$$

De plus, grâce au Corollaire 2.4.23, on sait que pour tout  $X_1 \in ]0, A[$  il existe une constante  $C$  telle que, pour  $z$  grand dans le plan complexe et pour tout  $X \in ]0, X_1[$ ,

$$\left| \int_0^X G_2(t, X, z) h_{2,2}(t, \lambda, z) dt \right| \leq C \frac{e^{|\operatorname{Re}(z)|X}}{|z|}.$$

On conclut ainsi que, pour tout  $X_1 \in ]0, A[$ , il existe une constante  $C$  telle que pour  $z$  grand dans le plan complexe

$$|F_{R2,2}(X, \lambda, z) - \alpha_{22} \sqrt{X} I_{\nu_-}(zX)| \leq C \frac{e^{|\operatorname{Re}(z)|X}}{|z|}, \quad \forall X \in ]0, X_1[.$$

□

#### 2.4.6 Asymptotiques des fonctions de Jost à gauche pour $z$ grand dans le plan complexe

Comme pour les fonctions de Jost à droite on peut prouver que les fonctions de Jost à gauche vérifient les estimations suivantes.

**Théoreme 2.4.28.** *On pose*

$$\alpha_L(z) = \left(\frac{z}{2}\right)^{\nu_+} \left(-\frac{\kappa_+}{a_+}\right)^{i\left(\frac{\lambda-c_+}{\kappa_+}\right)} \Gamma(1 - \nu_+)$$

et

$$\beta_L(z) = \left(\frac{z}{2}\right)^{\mu_+} \left(-\frac{\kappa_+}{a_+}\right)^{-i\left(\frac{\lambda-c_+}{\kappa_+}\right)} \Gamma(1 - \mu_+).$$

Pour  $z$  grand dans le plan complexe (voir la remarque suivante), les fonctions de Jost à gauche vérifient les estimations suivantes uniformément sur chaque sous-ensemble compact de  $]0, A[$ ,

$$\left\| F_{L1}(X, \lambda, z) - \alpha_L(z) \sqrt{A - X} I_{-\nu_+}(z(A - X)) \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\| = O\left(\frac{e^{|\operatorname{Re}(z)|(A-X)}}{|z|}\right),$$

$$\begin{aligned} \left\| F_{L2}(X, \lambda, z) + i\beta_L(z)\sqrt{A-X}I_{\nu_+}(z(A-X)) \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \right\| &= O\left(\frac{e^{|\operatorname{Re}(z)|(A-X)}}{|z|}\right), \\ \left\| F_{L3}(X, \lambda, z) + i\overline{\beta_L(\bar{z})}\sqrt{A-X}I_{\mu_+}(z(A-X)) \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \right\| &= O\left(\frac{e^{|\operatorname{Re}(z)|(A-X)}}{|z|}\right), \\ \left\| F_{L4}(X, \lambda, z) - \overline{\alpha_L(\bar{z})}\sqrt{A-X}I_{-\mu_+}(z(A-X)) \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\| &= O\left(\frac{e^{|\operatorname{Re}(z)|(A-X)}}{|z|}\right). \end{aligned}$$

**Remarque 2.4.29.** *Comme lors de l'étude de la fonction de Jost à droite on doit faire attention car les asymptotiques des fonctions de Bessel modifiées sont données dans tout le plan complexe excepté au voisinage de l'axe  $\mathbb{R}^-$ . Cependant, en utilisant des propriétés de parité/imparité (provenant de la définition de  $\alpha_L(z)$  et  $\beta_L(z)$ ) on peut étendre les asymptotiques à tout le plan complexe.*

Par conséquent, en utilisant l'asymptotique (2.4.5), on obtient les asymptotiques suivantes des fonctions de Jost à gauche pour  $z \rightarrow +\infty$ ,  $z$  réel.

**Théoreme 2.4.30.** *Les fonctions de Jost à gauche vérifient les asymptotiques suivantes pour  $z \rightarrow +\infty$ ,  $z$  réel, uniformément sur chaque sous-ensemble compact de  $]0, A[$ ,*

$$\begin{aligned} F_{L1}(X, \lambda, z) &= \frac{2^{-\nu_+}}{\sqrt{2\pi}} \left(-\frac{\kappa_+}{a_+}\right)^{i\frac{(\lambda-c_+)}{\kappa_+}} \Gamma(1-\nu_+) z^{-i\frac{(\lambda-c_+)}{\kappa_+}} \\ &\quad \times e^{z(A-X)} \begin{pmatrix} 1 & O\left(\frac{1}{z}\right) \\ O\left(\frac{1}{z}\right) & 1 \end{pmatrix} [1]_z, \\ F_{L2}(X, \lambda, z) &= -i\frac{2^{-\mu_+}}{\sqrt{2\pi}} \left(-\frac{\kappa_+}{a_+}\right)^{-i\frac{(\lambda-c_+)}{\kappa_+}} \Gamma(1-\mu_+) z^{i\frac{(\lambda-c_+)}{\kappa_+}} \\ &\quad \times e^{z(A-X)} \begin{pmatrix} O\left(\frac{1}{z}\right) & 1 \\ -1 & O\left(\frac{1}{z}\right) \end{pmatrix} [1]_z, \\ F_{L3}(X, \lambda, z) &= -i\frac{2^{-\nu_+}}{\sqrt{2\pi}} \left(-\frac{\kappa_+}{a_+}\right)^{i\frac{(\lambda-c_+)}{\kappa_+}} \Gamma(1-\nu_+) z^{-i\frac{(\lambda-c_+)}{\kappa_+}} \\ &\quad \times e^{z(A-X)} \begin{pmatrix} O\left(\frac{1}{z}\right) & 1 \\ -1 & O\left(\frac{1}{z}\right) \end{pmatrix} [1]_z, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 F_{L4}(X, \lambda, z) &= \frac{2^{-\mu_+}}{\sqrt{2\pi}} \left( -\frac{\kappa_+}{a_+} \right)^{-i\frac{(\lambda-c_+)}{\kappa_+}} \Gamma(1-\mu_+) z^{i\frac{(\lambda-c_+)}{\kappa_+}} \\
 &\times e^{z(A-X)} \begin{pmatrix} 1 & O\left(\frac{1}{z}\right) \\ O\left(\frac{1}{z}\right) & 1 \end{pmatrix} [1]_z,
 \end{aligned}$$

où

$$[1]_z = 1 + O\left(\frac{1}{z}\right).$$

**Remarque 2.4.31.** *Les asymptotiques correspondantes sont également vraies pour  $z \rightarrow -\infty$  par parité/imparité.*

### 2.4.7 Asymptotiques de la matrice des données de diffusion

On rappelle que la matrice  $\hat{A}_L(\lambda, z)$  est définie par

$$\hat{F}_L(x, \lambda, z) = \hat{F}_R(x, \lambda, z) \hat{A}_L(\lambda, z),$$

et, grâce à l'Équation (2.3.4), on voit que

$$\hat{A}_L(\lambda, z) = \Gamma^1 \hat{F}_R(x, \lambda, \bar{z})^* \Gamma^1 \hat{F}_L(x, \lambda, z).$$

De plus,

$$F_R(x, \lambda, z) = e^{-i\Gamma^1 C^-(x)} \hat{F}_R(x, \lambda, z) \quad \text{et} \quad F_L(x, \lambda, z) = e^{-i\Gamma^1 C^-(x)} \hat{F}_L(x, \lambda, z),$$

donc,

$$\hat{A}_L(\lambda, z) = \Gamma^1 F_R(x, \lambda, \bar{z})^* \Gamma^1 F_L(x, \lambda, z).$$

Ainsi, les blocs de la matrice  $\hat{A}_L(\lambda, z)$  vérifient, pour tout  $X \in ]0, A[$ , les relations

$$\begin{cases}
 \hat{A}_{L1}(\lambda, z) = F_{R1}(X, \lambda, \bar{z})^* F_{L1}(X, \lambda, z) - F_{R3}(X, \lambda, \bar{z})^* F_{L3}(X, \lambda, z) \\
 \hat{A}_{L2}(\lambda, z) = F_{R1}(X, \lambda, \bar{z})^* F_{L2}(X, \lambda, z) - F_{R3}(X, \lambda, \bar{z})^* F_{L4}(X, \lambda, z) \\
 \hat{A}_{L3}(\lambda, z) = -F_{R2}(X, \lambda, \bar{z})^* F_{L1}(X, \lambda, z) + F_{R4}(X, \lambda, \bar{z})^* F_{L3}(X, \lambda, z) \\
 \hat{A}_{L4}(\lambda, z) = -F_{R2}(X, \lambda, \bar{z})^* F_{L2}(X, \lambda, z) + F_{R4}(X, \lambda, \bar{z})^* F_{L4}(X, \lambda, z)
 \end{cases}.$$

**Remarque 2.4.32.** *On voit immédiatement, grâce aux symétries des asymptotiques des fonctions de Jost, que pour  $z$  assez grand dans le plan complexe on a  $\hat{A}_{L1}(\lambda, z) \sim \hat{A}_{L4}(\lambda, \bar{z})^*$  et  $\hat{A}_{L2}(\lambda, z) \sim \hat{A}_{L3}(\lambda, \bar{z})^*$ . Ce sont les symétries vraies pour tout  $z$  dans le cas sans masse étudié dans [DN11].*



Grâce aux Théorèmes 2.4.6 et 2.4.28 on obtient que si l'on pose

$$\alpha(z) = \left(\frac{\kappa_-}{a_-}\right)^{-i\left(\frac{\lambda-c_-}{\kappa_-}\right)} \left(-\frac{\kappa_+}{a_+}\right)^{i\left(\frac{\lambda-c_+}{\kappa_+}\right)} \Gamma(1-\mu_-)\Gamma(1-\nu_+) \left(\frac{z}{2}\right)^{\mu_-+\nu_+}$$

et

$$\beta(z) = \left(\frac{\kappa_-}{a_-}\right)^{-i\left(\frac{\lambda-c_-}{\kappa_-}\right)} \left(-\frac{\kappa_+}{a_+}\right)^{-i\left(\frac{\lambda-c_+}{\kappa_+}\right)} \Gamma(1-\mu_-)\Gamma(1-\mu_+) \left(\frac{z}{2}\right)^{\mu_-+\mu_+},$$

les blocs de la matrice  $\hat{A}_L$  vérifient les asymptotiques suivantes pour  $z$  grand dans le plan complexe :

$$\begin{aligned} & \left\| \hat{A}_{L1}(\lambda, z) - \alpha(z) \sqrt{X(A-X)} [I_{-\mu_-}(zX) I_{-\nu_+}(z(A-X)) \right. \\ & \quad \left. + I_{\nu_-}(zX) I_{\mu_+}(z(A-X))] \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\| = O\left(\frac{e^{|\operatorname{Re}(z)|A}}{|z|}\right), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \left\| \hat{A}_{L2}(\lambda, z) + i\beta(z) \sqrt{X(A-X)} [I_{\nu_-}(zX) I_{-\mu_+}(z(A-X)) \right. \\ & \quad \left. + I_{-\mu_-}(zX) I_{\nu_+}(z(A-X))] \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \right\| = O\left(\frac{e^{|\operatorname{Re}(z)|A}}{|z|}\right), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \left\| \hat{A}_{L3}(\lambda, z) + i\overline{\beta(\bar{z})} \sqrt{X(A-X)} (I_{\mu_-}(zX) I_{-\nu_+}(z(A-X)) \right. \\ & \quad \left. + I_{-\nu_-}(zX) I_{\mu_+}(z(A-X))) \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \right\| = O\left(\frac{e^{|\operatorname{Re}(z)|A}}{|z|}\right), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \left\| \hat{A}_{L4}(\lambda, z) - \overline{\alpha(\bar{z})} \sqrt{X(A-X)} (I_{-\nu_-}(zX) I_{-\mu_+}(z(A-X)) \right. \\ & \quad \left. + I_{\mu_-}(zX) I_{\nu_+}(z(A-X))) \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\| = O\left(\frac{e^{|\operatorname{Re}(z)|A}}{|z|}\right). \end{aligned}$$

À présent, en utilisant les asymptotiques des fonctions de Bessel modifiées données par (2.4.5), on obtient les asymptotiques de la matrice  $\hat{A}_L(\lambda, z)$  pour  $z$  grand dans le plan complexe (on peut étendre ces asymptotiques sur la demi-droite  $\mathbb{R}^-$  par parité).

**Théoreme 2.4.33.** *Les blocs de la matrice  $\hat{A}_L$  vérifient les estimations suivantes pour  $z$*

grand dans le plan complexe :

$$\begin{aligned}
\hat{A}_{L1}(\lambda, z) &= \frac{1}{2\pi} \left(-\frac{\kappa_+}{a_+}\right)^{i\frac{(\lambda-c_+)}{\kappa_+}} \left(\frac{\kappa_-}{a_-}\right)^{-i\frac{(\lambda-c_-)}{\kappa_-}} \Gamma(1-\nu_+)\Gamma(1-\mu_-) \\
&\quad \times \left(\frac{z}{2}\right)^{i\left(\frac{(\lambda-c_-)}{\kappa_-} - \frac{(\lambda-c_+)}{\kappa_+}\right)} \left(e^{zA} + e^{-zA} e^{-\operatorname{sg}(\operatorname{Im}(z))\pi\left(\frac{\lambda-c_+}{\kappa_+} - \frac{\lambda-c_-}{\kappa_-}\right)}\right) I_z[1]_z, \\
\hat{A}_{L2}(\lambda, z) &= \frac{-i}{2\pi} \left(-\frac{\kappa_+}{a_+}\right)^{-i\frac{(\lambda-c_+)}{\kappa_+}} \left(\frac{\kappa_-}{a_-}\right)^{-i\frac{(\lambda-c_-)}{\kappa_-}} \Gamma(1-\mu_+)\Gamma(1-\mu_-) \\
&\quad \times \left(\frac{z}{2}\right)^{i\left(\frac{(\lambda-c_-)}{\kappa_-} + \frac{(\lambda-c_+)}{\kappa_+}\right)} \left(e^{zA} - e^{-zA} e^{\operatorname{sg}(\operatorname{Im}(z))\pi\left(\frac{\lambda-c_+}{\kappa_+} - \frac{\lambda-c_-}{\kappa_-}\right)}\right) J_z[1]_z, \\
\hat{A}_{L3}(\lambda, z) &= \frac{-i}{2\pi} \left(-\frac{\kappa_+}{a_+}\right)^{i\frac{(\lambda-c_+)}{\kappa_+}} \left(\frac{\kappa_-}{a_-}\right)^{i\frac{(\lambda-c_-)}{\kappa_-}} \Gamma(1-\nu_+)\Gamma(1-\nu_-) \\
&\quad \times \left(\frac{z}{2}\right)^{-i\left(\frac{(\lambda-c_-)}{\kappa_-} + \frac{(\lambda-c_+)}{\kappa_+}\right)} \left(e^{zA} - e^{-zA} e^{-\operatorname{sg}(\operatorname{Im}(z))\pi\left(\frac{\lambda-c_+}{\kappa_+} + \frac{\lambda-c_-}{\kappa_-}\right)}\right) J_z[1]_z, \\
\hat{A}_{L4}(\lambda, z) &= \frac{1}{2\pi} \left(-\frac{\kappa_+}{a_+}\right)^{-i\frac{(\lambda-c_+)}{\kappa_+}} \left(\frac{\kappa_-}{a_-}\right)^{i\frac{(\lambda-c_-)}{\kappa_-}} \Gamma(1-\mu_+)\Gamma(1-\nu_-) \\
&\quad \times \left(\frac{z}{2}\right)^{-i\left(\frac{(\lambda-c_-)}{\kappa_-} - \frac{(\lambda-c_+)}{\kappa_+}\right)} \left(e^{zA} + e^{-zA} e^{\operatorname{sg}(\operatorname{Im}(z))\pi\left(\frac{\lambda-c_+}{\kappa_+} - \frac{\lambda-c_-}{\kappa_-}\right)}\right) I_z[1]_z,
\end{aligned}$$

où

$$I_z = \begin{pmatrix} 1 & O\left(\frac{1}{z}\right) \\ O\left(\frac{1}{z}\right) & 1 \end{pmatrix}, \quad J_z = \begin{pmatrix} O\left(\frac{1}{z}\right) & 1 \\ -1 & O\left(\frac{1}{z}\right) \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad [1]_z = 1 + O\left(\frac{1}{z}\right).$$

**Remarque 2.4.34.** Pour  $z$  grand dans  $\mathbb{R}^+$  on obtient l'analogue des asymptotiques données dans [DN11], Theorem 4.19, dans le cas sans masse.

*Démonstration.* On commence par rappeler que la matrice des données de diffusion  $\hat{A}_L$  est définie par

$$F_L(x, \lambda, z) = F_R(x, \lambda, z) \hat{A}_L(\lambda, z).$$

Pour prouver le Théorème 2.4.33 on utilise notre connaissance des asymptotiques des fonctions de Jost à droite et à gauche données par les Théorèmes 2.4.6 et 2.4.28. On pose

$$\alpha_R(z) = \left(\frac{z}{2}\right)^{\nu_-} \left(\frac{\kappa_-}{a_-}\right)^{i\frac{(\lambda-c_-)}{\kappa_-}} \Gamma(1-\nu_-) \sqrt{X} I_{-\nu_-}(zX)$$

et

$$\beta_R(z) = \left(\frac{z}{2}\right)^{\mu_-} \left(\frac{\kappa_-}{a_-}\right)^{-i\frac{(\lambda-c_-)}{\kappa_-}} \Gamma(1-\mu_-) \sqrt{X} I_{\mu_-}(zX).$$

Ainsi, par définition des fonctions de Bessel modifiées (2.4.3) on obtient facilement que

la fonction  $z \mapsto \alpha_R(z)$  est paire alors que la fonction  $z \mapsto \beta_R(z)$  est impaire sur le plan complexe. De même, si l'on pose

$$\alpha_L(z) = \left(\frac{z}{2}\right)^{\nu_+} \left(\frac{\kappa_+}{a_+}\right)^{i\frac{(\lambda-c_+)}{\kappa_+}} \Gamma(1-\nu_+) \sqrt{X} I_{-\nu_+}(zX)$$

et

$$\beta_L(z) = \left(\frac{z}{2}\right)^{\mu_+} \left(\frac{\kappa_+}{a_+}\right)^{-i\frac{(\lambda-c_+)}{\kappa_+}} \Gamma(1-\mu_+) \sqrt{X} I_{\nu_+}(zX),$$

on obtient que la fonction  $z \mapsto \alpha_L(z)$  est paire alors que la fonction  $z \mapsto \beta_L(z)$  est impaire sur le plan complexe. Ainsi, il est suffisant de prouver le Théorème 2.4.33 pour  $z$  grand tel que  $\text{Re}(z) \geq 0$ .

De plus, pour de tels  $z$ , en utilisant l'asymptotique (2.4.5), on sait que pour  $z$  grand,

$$\alpha_R(z) = \frac{2^{-\nu_-}}{\sqrt{2\pi}} \left(\frac{\kappa_-}{a_-}\right)^{i\frac{(\lambda-c_-)}{\kappa_-}} \Gamma(1-\nu_-) z^{-i\frac{(\lambda-c_-)}{\kappa_-}} e^{zX} \left(1 + O\left(\frac{1}{z}\right)\right),$$

$$\beta_R(z) = \frac{2^{-\mu_-}}{\sqrt{2\pi}} \left(\frac{\kappa_-}{a_-}\right)^{-i\frac{(\lambda-c_-)}{\kappa_-}} \Gamma(1-\mu_-) z^{i\frac{(\lambda-c_-)}{\kappa_-}} e^{zX} \left(1 + O\left(\frac{1}{z}\right)\right),$$

$$\alpha_L(z) = \frac{2^{-\nu_+}}{\sqrt{2\pi}} \left(\frac{\kappa_+}{a_+}\right)^{i\frac{(\lambda-c_+)}{\kappa_+}} \Gamma(1-\nu_+) z^{-i\frac{(\lambda-c_+)}{\kappa_+}} e^{zX} \left(1 + O\left(\frac{1}{z}\right)\right),$$

et

$$\beta_L(z) = \frac{2^{-\mu_+}}{\sqrt{2\pi}} \left(\frac{\kappa_+}{a_+}\right)^{-i\frac{(\lambda-c_+)}{\kappa_+}} \Gamma(1-\mu_+) z^{i\frac{(\lambda-c_+)}{\kappa_+}} e^{zX} \left(1 + O\left(\frac{1}{z}\right)\right).$$

Ainsi, en posant

$$\alpha^R(z) = \frac{2^{-\nu_-}}{\sqrt{2\pi}} \left(\frac{\kappa_-}{a_-}\right)^{i\frac{(\lambda-c_-)}{\kappa_-}} \Gamma(1-\nu_-) z^{-i\frac{(\lambda-c_-)}{\kappa_-}}$$

et

$$\beta^R(z) = \frac{2^{-\mu_-}}{\sqrt{2\pi}} \left(\frac{\kappa_-}{a_-}\right)^{-i\frac{(\lambda-c_-)}{\kappa_-}} \Gamma(1-\mu_-) z^{i\frac{(\lambda-c_-)}{\kappa_-}},$$

le Théorème 2.4.6 montre que, en utilisant les notations  $\alpha^R := \alpha^R(z)$ ,  $\beta^R := \beta^R(z)$ ,  $\overline{\alpha^R} := \overline{\alpha^R(\bar{z})}$  et  $\overline{\beta^R} := \overline{\beta^R(\bar{z})}$ , la matrice  $F_R$  est équivalente pour  $z$  grand à la matrice

$$R = \begin{pmatrix} \alpha^R & 0 & 0 & i\beta^R \\ 0 & \alpha^R & -i\beta^R & 0 \\ 0 & i\overline{\beta^R} & \overline{\alpha^R} & 0 \\ -i\overline{\beta^R} & 0 & 0 & \overline{\alpha^R} \end{pmatrix} e^{zX}$$

dont l'inverse est (puisque  $\det(R) = e^{4zX}(|\alpha_R|^2 + |\beta_R|^2)^2 = 1$  car  $\det(F_R) = 1$ ) :

$$R^{-1} = \begin{pmatrix} \overline{\alpha^R} & 0 & 0 & -i\beta^R \\ 0 & \overline{\alpha^R} & i\beta^R & 0 \\ 0 & -i\overline{\beta^R} & \alpha^R & 0 \\ i\overline{\beta^R} & 0 & 0 & \alpha^R \end{pmatrix} e^{zX}.$$

On note que l'on peut aussi utiliser la formule de l'inverse donnée dans [AKvdM00], Equation (2.5), que l'on utilisera plus tard. De même, en posant

$$\alpha^L = \frac{2^{-\nu_+}}{\sqrt{2\pi}} \left( -\frac{\kappa_+}{a_+} \right)^{i\frac{(\lambda-c_+)}{\kappa_+}} \Gamma(1-\nu_+) z^{-i\frac{(\lambda-c_+)}{\kappa_+}}$$

et

$$\beta^L = \frac{2^{-\mu_+}}{\sqrt{2\pi}} \left( -\frac{\kappa_+}{a_+} \right)^{-i\frac{(\lambda-c_+)}{\kappa_+}} \Gamma(1-\mu_+) z^{i\frac{(\lambda-c_+)}{\kappa_+}},$$

le Théorème 2.4.28 montre que, en utilisant les notations correspondantes, la matrice  $F_L$  est équivalente, pour  $z$  grand dans le plan complexe tel que  $\operatorname{Re}(z) \geq 0$ , à la matrice

$$L = \begin{pmatrix} \alpha^L & 0 & 0 & -i\beta^L \\ 0 & \alpha^L & i\beta^L & 0 \\ 0 & -i\overline{\beta^L} & \overline{\alpha^L} & 0 \\ i\overline{\beta^L} & 0 & 0 & \overline{\alpha^L} \end{pmatrix} e^{z(A-X)}.$$

Ainsi, la matrice  $\hat{A}_L$  est équivalente, pour  $z$  grand dans le plan complexe, à la matrice  $R^{-1}L$  qui est donnée par

$$\begin{pmatrix} \overline{\alpha^R}\alpha^L + \beta^R\overline{\beta^L} & 0 & 0 & -i\overline{\alpha^R}\beta^L - i\beta^R\overline{\alpha^L} \\ 0 & \overline{\alpha^R}\alpha^L + \beta^R\overline{\beta^L} & i\overline{\alpha^R}\beta^L + i\beta^R\overline{\alpha^L} & 0 \\ 0 & -i\overline{\beta^R}\alpha^L - i\alpha^R\overline{\beta^L} & \overline{\beta^R}\beta^L + \alpha^R\overline{\alpha^L} & 0 \\ i\overline{\beta^R}\alpha^L + i\alpha^R\overline{\beta^L} & 0 & 0 & \overline{\beta^R}\beta^L + \alpha^R\overline{\alpha^L} \end{pmatrix} e^{zA}.$$

De plus,

$$\begin{aligned} \overline{\alpha^R} \alpha^L + \beta^R \overline{\beta^L} &= \frac{1}{2\pi} \left( -\frac{\kappa_+}{a_+} \right)^{i \frac{(\lambda - c_+)}{\kappa_+}} \left( \frac{\kappa_-}{a_-} \right)^{-i \frac{(\lambda - c_-)}{\kappa_-}} \Gamma(1 - \nu_+) \Gamma(1 - \mu_-) \\ &\quad \times \left( \frac{z}{2} \right)^{i \left( \frac{(\lambda - c_-)}{\kappa_-} - \frac{(\lambda - c_+)}{\kappa_+} \right)} \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} \overline{\alpha^R} \beta^L + \beta^R \overline{\alpha^L} &= \frac{1}{2\pi} \left( -\frac{\kappa_+}{a_+} \right)^{-i \frac{(\lambda - c_+)}{\kappa_+}} \left( \frac{\kappa_-}{a_-} \right)^{-i \frac{(\lambda - c_-)}{\kappa_-}} \Gamma(1 - \mu_+) \Gamma(1 - \mu_-) \\ &\quad \times \left( \frac{z}{2} \right)^{i \left( \frac{(\lambda - c_-)}{\kappa_-} + \frac{(\lambda - c_+)}{\kappa_+} \right)}. \end{aligned}$$

Ceci achève la preuve du Théorème 2.4.33.  $\square$

## 2.5 Complexification du Moment Angulaire

Dans cette Section, on suit la Section 3 de [DN11] et on utilise la méthode de Complexification du Moment Angulaire. Pour commencer, on note que les fonctions de Jost  $F_L(x, \lambda, z)$  et  $F_R(x, \lambda, z)$  sont analytiques en la variable  $z \in \mathbb{C}$  puis on utilise les résultats d'unicité mentionnés en introduction en se servant des asymptotiques trouvées dans la Section 2.4.

### 2.5.1 Propriétés d'analyticité des fonctions de Jost et de la matrice des données de diffusion

Le but de cette Section est de prouver l'analyticité des fonctions de Jost et des coefficients de la matrice  $\hat{A}_L(\lambda, z)$  afin de pouvoir utiliser la classe de Nevanlinna par la suite.

**Lemme 2.5.1.** *Les applications  $z \mapsto F_R(x, \lambda, z)$  et  $z \mapsto F_L(x, \lambda, z)$  sont analytiques sur le plan complexe  $\mathbb{C}$ .*

*Démonstration.* On prouve ce Lemme pour les fonctions de Jost à droite puisque la preuve est la même pour les fonctions de Jost à gauche. On rappelle que le lien entre la fonction de Jost à droite du hamiltonien  $H$  et la matrice de Faddeev du hamiltonien  $A$  est donné par

$$F_R(x, \lambda, z) = e^{-i\Gamma^1 C^-(x)} \hat{M}_R(x, \lambda, z) e^{i\lambda \Gamma^1 x}.$$

Ainsi, l'analyticité de la fonction de Jost à droite est équivalente à l'analyticité de la matrice de Faddeev à droite. En utilisant (2.3.15) on obtient, par exemple, l'analyticité du bloc  $\hat{M}_{R1}$  puisque les termes de la série sont polynomiaux en la variable  $z$ . La preuve est la même pour les blocs  $\hat{M}_{R2}$ ,  $\hat{M}_{R3}$  et  $\hat{M}_{R4}$ .  $\square$

**Lemme 2.5.2.** *L'application  $z \mapsto \hat{A}_L(\lambda, z)$  est analytique sur le plan complexe  $\mathbb{C}$ .*

*Démonstration.* Par définition

$$F_L(x, \lambda, z) = F_R(x, \lambda, z) \hat{A}_L(\lambda, z).$$

Puisque  $\det(F_R) = 1$ , les coefficients de la matrice  $\hat{A}_L(\lambda, z)$  sont des combinaisons des composantes des fonctions de Jost. Ainsi les coefficients sont analytiques en la variable  $z$  d'après le Lemme précédent.  $\square$

### 2.5.2 Classe de Nevanlinna et résultat d'unicité

On prouve maintenant que les coefficients  $\hat{A}_{Li,j}$  de la matrice  $\hat{A}_L$  appartiennent à la classe de Nevanlinna lorsqu'on les restreint au demi-plan  $\Pi^+ = \{z \in \mathbb{C}, \operatorname{Re}(z) > 0\}$ . Ceci nous permettra d'utiliser les résultats d'unicité mentionnés en introduction. On commence par rappeler que la classe de Nevanlinna  $N(\Pi^+)$  est définie comme étant l'ensemble des fonctions analytiques  $h$  sur  $\Pi^+$  satisfaisant l'estimation

$$\sup_{0 < r < 1} \int_{-\pi}^{\pi} \ln^+ \left| h \left( \frac{1 - re^{i\varphi}}{1 + re^{i\varphi}} \right) \right| d\varphi < \infty,$$

où  $\ln^+(x) = \ln(x)$  si  $\ln(x) \geq 0$  et 0 si  $\ln(x) < 0$ . Nous allons utiliser le résultat suivant prouvé dans [Ram99].

**Lemme 2.5.3.** *Soit  $h \in H(\Pi^+)$  une fonction holomorphe sur  $\Pi^+$  satisfaisant*

$$|h(z)| \leq C e^{A \operatorname{Re}(z)}, \quad \forall z \in \Pi^+,$$

*où  $A$  et  $C$  sont deux constantes. Alors  $h \in N(\Pi^+)$ .*

*Démonstration.* Sans perte de généralité, on peut supposer que  $C \geq 1$ . Ainsi en utilisant l'estimation sur  $h$  et le fait que  $\ln^+(ab) \leq \ln^+(a) + \ln^+(b)$  pour  $a, b > 0$ , on a

$$\ln^+ \left| h \left( \frac{1 - re^{i\varphi}}{1 + re^{i\varphi}} \right) \right| \leq \ln C + A \operatorname{Re} \left( \frac{1 - re^{i\varphi}}{1 + re^{i\varphi}} \right) \leq \ln C + A \frac{1 - r^2}{1 + r^2 + 2r \cos(\varphi)}.$$

On utilise alors la formule  $\int_{-\pi}^{\pi} \frac{1-r^2}{1+r^2+2r\cos(\varphi)} d\varphi = 2\pi$  qui nous conduit au résultat.  $\square$

Comme conséquence du Lemme 2.5.3 et du Théorème 2.4.33, on obtient ainsi le résultat suivant.

**Corollaire 2.5.4.** *Pour chaque  $\lambda \in \mathbb{R}$  fixé, les applications  $z \mapsto \hat{A}_{Li,j}(\lambda, z)|_{\Pi^+}$  appartiennent à  $N(\Pi^+)$  pour  $(i, j) \in \{1, 2, 3, 4\}^2$ .*

On rappelle maintenant le résultat suivant prouvé dans [Ram99], Theorem 1.3.

**Théorème 2.5.5** ([Ram99], Thm. 1.3). *Soit  $h \in N(\Pi^+)$  satisfaisant  $h(n) = 0$  pour tout  $n \in \mathcal{L}$  où  $\mathcal{L} \subset \mathbb{N}^*$  avec  $\sum_{n \in \mathcal{L}} \frac{1}{n} = \infty$ . Alors  $h \equiv 0$  dans  $N(\Pi^+)$ .*

On déduit alors du Corollaire 2.5.4 et du Théorème 2.5.5 le résultat suivant.

**Corollaire 2.5.6.** *On considère deux trous noirs de type RN-dS et on désigne par  $\hat{A}_{Li,j}$  et  $\tilde{A}_{Li,j}$  les coefficients correspondants des matrices  $\hat{A}_L$  et  $\tilde{A}_L$ . Soit  $\mathcal{L} \subset \mathbb{N}^*$  satisfaisant  $\sum_{n \in \mathcal{L}} \frac{1}{n} = \infty$ . Supposons que pour  $i \in \{1, 2, 3, 4\}$  et  $j \in \{1, 2, 3, 4\}$*

$$\hat{A}_{Li,j}(\lambda, n) = \tilde{A}_{Li,j}(\lambda, n), \quad \forall n \in \mathcal{L}.$$

Alors,

$$\hat{A}_{Li,j}(\lambda, z) = \tilde{A}_{Li,j}(\lambda, z), \quad \forall z \in \mathbb{C}.$$

*Démonstration.* On applique le Théorème 2.5.5 aux fonctions  $\hat{A}_{Li,j}(\lambda, z) - \tilde{A}_{Li,j}(\lambda, z)$  qui appartiennent à  $N(\Pi^+)$  d'après le Corollaire 2.5.4.  $\square$

En d'autres termes, grâce au Corollaire 2.5.4 et au Théorème 2.5.5, les données de diffusion  $\hat{A}_{Li,j}(\lambda, z)$  sont déterminées de façon unique en tant que fonctions de  $z \in \mathbb{C}$  par leur valeurs sur un sous-ensemble  $\mathcal{L}$  de l'ensemble des entiers satisfaisant la condition de Müntz  $\sum_{n \in \mathcal{L}} \frac{1}{n} = \infty$ . Dans notre preuve du Théorème principal on aura besoin du résultat suivant.

**Corollaire 2.5.7.** *On considère deux trous noirs de type RN-dS et on désigne par  $\hat{L}$ ,  $\hat{R}$  et  $\tilde{L}$ ,  $\tilde{R}$  les coefficients de réflexion correspondants. Soit  $\mathcal{L} \subset \mathbb{N}^*$  satisfaisant  $\sum_{n \in \mathcal{L}} \frac{1}{n} = \infty$ . Supposons que*

$$\hat{L}(\lambda, n) = \tilde{L}(\lambda, n), \quad \forall n \in \mathcal{L} \quad (\text{respectivement} \quad \hat{R}(\lambda, n) = \tilde{R}(\lambda, n), \quad \forall n \in \mathcal{L}).$$

Alors, si on désigne par  $P$  l'ensemble des poles de  $\hat{L}$  (respectivement  $Q$  l'ensemble des poles de  $\hat{R}$ ) on a,

$$\hat{L}(\lambda, z) = \tilde{L}(\lambda, z), \quad \forall z \in \mathbb{C} \setminus P \quad (\text{respectivement} \quad \hat{R}(\lambda, z) = \tilde{R}(\lambda, z), \quad \forall z \in \mathbb{C} \setminus Q).$$

## 2.6. Preuve du Théorème principal

---

*Démonstration.* Puisque la preuve est similaire pour  $\hat{R}$ , on montre le résultat seulement pour le coefficient de réflexion  $\hat{L}$ . On rappelle (voir (2.1.18)) que

$$\hat{L}(\lambda, n) = \hat{A}_{L3}(\lambda, n) \hat{A}_{L1}(\lambda, n)^{-1} = -\hat{A}_{R4}(\lambda, n)^{-1} \hat{A}_{R3}(\lambda, n).$$

Ainsi, grâce à notre hypothèse, on obtient

$$\tilde{\hat{A}}_{R4}(\lambda, n) \hat{A}_{L3}(\lambda, n) = -\tilde{\hat{A}}_{R3}(\lambda, n) \hat{A}_{L1}(\lambda, n), \quad \forall n \in \mathcal{L}.$$

En utilisant le Corollaire 2.5.4 et le Théorème 2.5.5, on déduit de cette égalité que

$$\tilde{\hat{A}}_{R4}(\lambda, z) \hat{A}_{L3}(\lambda, z) = -\tilde{\hat{A}}_{R3}(\lambda, z) \hat{A}_{L1}(\lambda, z), \quad \forall z \in \mathbb{C}.$$

Finalement, pour tout  $z \in \mathbb{C} \setminus P$  (on note que grâce à l'égalité précédente  $P = \tilde{P}$ , où  $\tilde{P}$  est l'ensemble des poles de  $\tilde{\hat{L}}$ ),

$$\hat{L}(\lambda, z) = \hat{A}_{L3}(\lambda, z) \hat{A}_{L1}(\lambda, z)^{-1} = -\tilde{\hat{A}}_{R4}(\lambda, z)^{-1} \tilde{\hat{A}}_{R3}(\lambda, z) = \tilde{\hat{L}}(\lambda, z).$$

□

## 2.6 Preuve du Théorème principal

Le but de cette Section est de prouver le Théorème 2.1.1. On commence par supposer que l'assertion (i) est satisfaite. Nous devons alors prouver l'unicité des paramètres  $(M, Q, \Lambda)$  d'un trou noir de type RN-dS à partir de la connaissance des coefficients de réflexion  $L(\lambda, n)$  des matrices de diffusion partielles, pour une énergie fixée  $\lambda \in \mathbb{R}$  et pour tout  $n \in \mathcal{L} \subset \mathbb{N}^*$  satisfaisant la condition de Müntz  $\sum_{n \in \mathcal{L}} \frac{1}{n} = \infty$ .

Considérons donc deux trous noirs de type RN-dS ayant respectivement pour paramètres  $(M, Q, \Lambda)$  et  $(\tilde{M}, \tilde{Q}, \tilde{\Lambda})$ . On désigne par  $a(x)$ ,  $b(x)$  et  $c(x)$  et  $\tilde{a}(x)$ ,  $\tilde{b}(x)$  et  $\tilde{c}(x)$  les potentiels apparaissant dans l'équation de Dirac (2.1.6) correspondante et définis par (2.1.8). On suppose que

$$L(\lambda, n) = \tilde{L}(\lambda, n), \quad \forall n \in \mathcal{L}.$$

Ainsi (voir Proposition 2.3.1),

$$\hat{L}(\lambda, n) = \tilde{\hat{L}}(\lambda, n), \quad \forall n \in \mathcal{L}.$$



**Lemme 2.6.1.** *Supposons que*

$$\hat{L}(\lambda, n) = \tilde{\tilde{L}}(\lambda, n), \quad \forall n \in \mathcal{L}.$$

*Alors*

$$A := \int_{\mathbb{R}} a(t) dt = \int_{\mathbb{R}} \tilde{a}(t) dt =: \tilde{A}.$$

*Démonstration.* On rappelle que (voir (2.3.7) et (2.1.18)),

$$\hat{L}(\lambda, n) = \hat{A}_{L3}(\lambda, n) \hat{A}_{L1}(\lambda, n)^{-1}$$

et

$$\hat{A}_{L1}(\lambda, n)^* \hat{A}_{L1}(\lambda, n) = I_2 + \hat{A}_{L3}(\lambda, n)^* \hat{A}_{L3}(\lambda, n).$$

On note que, grâce à leur asymptotiques données dans le Théorème 2.4.33, les blocs  $\hat{A}_{Li}(\lambda, n)$ ,  $i \in \{1, 2, 3, 4\}$ , de la matrice  $\hat{A}_L(\lambda, n)$ , sont inversibles pour  $n$  assez grand. Ainsi, pour  $n$  assez grand,

$$\begin{aligned} \hat{A}_{L1}(\lambda, n)^* &= \hat{A}_{L1}(\lambda, n)^{-1} + \hat{A}_{L3}(\lambda, n)^* \hat{L}(\lambda, n) \\ &= \hat{A}_{L1}(\lambda, n)^{-1} + \hat{A}_{L3}(\lambda, n)^* \tilde{\tilde{L}}(\lambda, n) \\ &= \hat{A}_{L1}^{-1} + \hat{A}_{L3}^* \left( (\hat{A}_{L3}^*)^{-1} (\hat{A}_{L1}^* \tilde{\tilde{A}}_{L1} - I_2) \tilde{\tilde{A}}_{L1}^{-1} \right) \\ &= \hat{A}_{L1}^{-1} + \hat{A}_{L3}^* \left( (\hat{A}_{L3}^*)^{-1} (\hat{A}_{L1}^* - \tilde{\tilde{A}}_{L1}^{-1}) \right). \end{aligned}$$

Donc,

$$(\hat{A}_{L3}^*)^{-1} \hat{A}_{L1}^* - (\hat{A}_{L3}^*)^{-1} \hat{A}_{L1}^{-1} = (\tilde{\tilde{A}}_{L3}^*)^{-1} \tilde{\tilde{A}}_{L1}^* - (\tilde{\tilde{A}}_{L3}^*)^{-1} \tilde{\tilde{A}}_{L1}^{-1}.$$

De plus, l'hypothèse implique que,

$$(L(\lambda, n)^*)^{-1} = (\tilde{\tilde{L}}(\lambda, n)^*)^{-1},$$

i.e.

$$(\hat{A}_{L3}^*)^{-1} \hat{A}_{L1}^* = (\tilde{\tilde{A}}_{L3}^*)^{-1} \tilde{\tilde{A}}_{L1}^*.$$

Ainsi,

$$(\hat{A}_{L3}^*)^{-1} \hat{A}_{L1}^{-1} = (\tilde{\tilde{A}}_{L3}^*)^{-1} \tilde{\tilde{A}}_{L1}^{-1}.$$

Finalement, en utilisant les asymptotiques données dans le Théorème 2.4.33, on obtient que  $A = \tilde{A}$ .  $\square$

Ainsi, on peut définir les difféomorphismes  $h, \tilde{h} : ]0, A[ \rightarrow \mathbb{R}$  comme étant respectivement

les inverses des transformations de Liouville  $g$  et  $\tilde{g}$  dans lesquelles on utilise respectivement les potentiels  $a(x)$  et  $\tilde{a}(x)$ . À présent, comme dans [DN11], on suit la stratégie inspirée de [FY05]. On introduit ainsi, pour  $X \in ]0, A[$ , la matrice  $4 \times 4$

$$P(X, \lambda, z) = \begin{pmatrix} P_1(X, \lambda, z) & P_2(X, \lambda, z) \\ P_3(X, \lambda, z) & P_4(X, \lambda, z) \end{pmatrix}, \quad P_j(X, \lambda, z) \in M_2(\mathbb{C}), \quad j \in \{1, 2, 3, 4\},$$

définie par

$$P(X, \lambda, z) \tilde{F}_R(\tilde{h}(X), \lambda, z) = F_R(h(X), \lambda, z).$$

On commence par prouver que la matrice  $P(X, \lambda, z)$  est constante et égale à  $\pm I_4$  en utilisant le Théorème de Phragmén-Lindelöf et le Théorème de Liouville grâce à de bonnes estimations sur les coefficients de la matrice  $P(X, \lambda, z)$  ainsi qu'à leur analyticité en la variable  $z$ . Après ceci, on obtient deux égalités sur des fonctions scalaires dépendantes des potentiels et on déduit de la forme explicite des potentiels l'unicité de  $M$ ,  $Q$  et  $\Lambda$ .

### 2.6.1 Étude de la matrice $P$

On commence par rappeler que

$$F_R(x, \lambda, z) = e^{-i\Gamma^1 C^-(x)} \hat{F}_R(x, \lambda, z).$$

Ainsi,

$$\begin{aligned} P(X, \lambda, z) &= F_R(h(X), \lambda, z) \tilde{F}_R(\tilde{h}(X), \lambda, z)^{-1} \\ &= e^{-i\Gamma^1 C^-(h(X))} \hat{F}_R(x, \lambda, z) \tilde{\hat{F}}_R(\tilde{h}(X), \lambda, z)^{-1} e^{i\Gamma^1 \tilde{C}^-(\tilde{h}(X))}. \end{aligned}$$

On sait (voir (2.3.3)) que

$$\tilde{\hat{F}}_R(\tilde{h}(X), \lambda, z)^{-1} = \Gamma^1 \tilde{\hat{F}}_R(\tilde{h}(X), \lambda, z)^* \Gamma^1.$$

Ainsi,

$$\begin{aligned} P(X, \lambda, z) &= e^{-i\Gamma^1 C^-(h(X))} \hat{F}_R(h(X), \lambda, z) \Gamma^1 \tilde{\hat{F}}_R(\tilde{h}(X), \lambda, z)^* \Gamma^1 e^{i\Gamma^1 \tilde{C}^-(\tilde{h}(X))} \\ &= e^{-i\Gamma^1 C^-} \begin{pmatrix} \hat{F}_{R1} \tilde{\hat{F}}_{R1}^* - \hat{F}_{R2} \tilde{\hat{F}}_{R2}^* & -\hat{F}_{R1} \tilde{\hat{F}}_{R3}^* + \hat{F}_{R2} \tilde{\hat{F}}_{R4}^* \\ \hat{F}_{R3} \tilde{\hat{F}}_{R1}^* - \hat{F}_{R4} \tilde{\hat{F}}_{R2}^* & -\hat{F}_{R3} \tilde{\hat{F}}_{R3}^* + \hat{F}_{R4} \tilde{\hat{F}}_{R4}^* \end{pmatrix} e^{i\Gamma^1 \tilde{C}^-} \\ &= \begin{pmatrix} F_{R1} \tilde{F}_{R1}^* - F_{R2} \tilde{F}_{R2}^* & -F_{R1} \tilde{F}_{R3}^* + F_{R2} \tilde{F}_{R4}^* \\ F_{R3} \tilde{F}_{R1}^* - F_{R4} \tilde{F}_{R2}^* & -F_{R3} \tilde{F}_{R3}^* + F_{R4} \tilde{F}_{R4}^* \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

**Lemme 2.6.2.** *Pour tout  $(i, j) \in \{1, 2, 3, 4\}^2$ , les applications  $z \mapsto P_{i,j}(X, \lambda, z)$  sont analytiques sur  $\mathbb{C}$  et de type exponentiel (i.e. qu'il existe des constantes  $c$  et  $C$  telles que  $|P_{i,j}(X, \lambda, z)| \leq ce^{C|z|}$ ).*

*Démonstration.* Puisque les fonctions de Jost sont analytiques sur le plan complexe, le premier point du Lemme est une conséquence immédiate de l'égalité précédente. Le fait que les composantes  $P_{i,j}(X, \lambda, z)$  soient de type exponentiel est une conséquence des Théorèmes 2.4.6, 2.4.28 et 2.4.33.  $\square$

On étudie seulement  $P_1$  et  $P_2$  puisque l'étude de  $P_3$  et  $P_4$  est similaire. On sait que

$$P_1(X, \lambda, z) = F_{R1}\tilde{F}_{R1}^* - F_{R2}\tilde{F}_{R2}^*$$

et

$$P_2(X, \lambda, z) = -F_{R1}\tilde{F}_{R3}^* + F_{R2}\tilde{F}_{R4}^*.$$

On utilise maintenant

$$\begin{aligned} F_L(x, \lambda, z) &= F_R(x, \lambda, z)\hat{A}_L(\lambda, z) \\ &= \begin{pmatrix} F_{R1}\hat{A}_{L1} + F_{R2}\hat{A}_{L3} & F_{R1}\hat{A}_{L2} + F_{R2}\hat{A}_{L4} \\ F_{R3}\hat{A}_{L1} + F_{R4}\hat{A}_{L3} & F_{R3}\hat{A}_{L2} + F_{R4}\hat{A}_{L4} \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Ainsi, puisque

$$F_{L1} = F_{R1}\hat{A}_{L1} + F_{R2}\hat{A}_{L3},$$

on obtient

$$F_{R1} = (F_{L1} - F_{R2}\hat{A}_{L3})\hat{A}_{L1}^{-1} = F_{L1}\hat{A}_{L1}^{-1} - F_{R2}\hat{A}_{L3}\hat{A}_{L1}^{-1},$$

et, grâce à

$$F_{L2} = F_{R1}\hat{A}_{L2} + F_{R2}\hat{A}_{L4},$$

on obtient également que

$$F_{R2} = (F_{L2} - F_{R1}\hat{A}_{L2})\hat{A}_{L4}^{-1} = F_{L2}\hat{A}_{L4}^{-1} - F_{R1}\hat{A}_{L2}\hat{A}_{L4}^{-1}.$$

On note que, grâce aux asymptotiques des matrices  $A_{Li}$  et  $A_{Ri}$ , pour  $i \in \{1, 2, 3, 4\}$ , ces matrices sont inversibles pour  $z$  réel assez grand. Ainsi, pour  $z$  assez grand,

$$\tilde{F}_{R2}^* = (\tilde{\hat{A}}_{L4}^{-1})^* \tilde{F}_{L2}^* - (\tilde{\hat{A}}_{L4}^{-1})^* \tilde{\hat{A}}_{L2}^* \tilde{F}_{R1}^*.$$

## 2.6. Preuve du Théorème principal

---

De plus, grâce aux Équations (2.3.5) et (2.3.6),

$$(\tilde{A}_{L4}^{-1})^* \tilde{A}_{L2}^* = -\tilde{A}_{R4}^{-1} \tilde{A}_{R3} = \tilde{L}.$$

Finalement,

$$\begin{aligned} P_1(X, \lambda, z) &= F_{R1} \tilde{F}_{R1}^* - F_{R2} \tilde{F}_{R2}^* \\ &= (F_{L1} \hat{A}_{L1}^{-1} - F_{R2} \hat{L}(\lambda, z)) \tilde{F}_{R1}^* - F_{R2} ((\tilde{A}_{L4}^{-1})^* \tilde{F}_{L2}^* - \tilde{L}(\lambda, z) \tilde{F}_{R1}^*) \\ &= F_{L1} \hat{A}_{L1}^{-1} \tilde{F}_{R1}^* - F_{R2} (\tilde{A}_{L4}^{-1})^* \tilde{F}_{L2}^* + F_{R2} (\tilde{L}(\lambda, z) - \hat{L}(\lambda, z)) \tilde{F}_{R1}^*. \end{aligned}$$

Or, puisque  $\hat{L}$  et  $\tilde{L}$  n'ont pas de singularité sur  $\mathbb{R}$ , le Corollaire 2.5.7 montre que  $\hat{L}(\lambda, z) = \tilde{L}(\lambda, z)$  pour tout  $z \in \mathbb{R}$ . Ainsi, on obtient que pour tout  $z \in \mathbb{R}$  et pour tout  $X \in ]0, A[$ ,

$$P_1(X, \lambda, z) = F_{L1} \hat{A}_{L1}^{-1} \tilde{F}_{R1}^* - F_{R2} (\tilde{A}_{L4}^{-1})^* \tilde{F}_{L2}^*. \quad (2.6.1)$$

Pour  $P_2$ , on sait que

$$P_2(X, \lambda, z) = -F_{R1} \tilde{F}_{R3}^* + F_{R2} \tilde{F}_{R4}^*.$$

On a déjà vu que

$$F_{R1} = F_{L1} \hat{A}_{L1}^{-1} - F_{R2} \hat{L}(\lambda, z).$$

De plus, comme dans le cas de  $F_{R2}$ , on montre facilement que

$$\tilde{F}_{R4}^* = (\tilde{A}_{L4}^{-1})^* \tilde{F}_{L4}^* - \tilde{L}(\lambda, z) \tilde{F}_{R3}^*.$$

Ainsi,

$$\begin{aligned} P_2(X, \lambda, z) &= -(F_{L1} \hat{A}_{L1}^{-1} - F_{R2} \hat{L}(\lambda, z)) \tilde{F}_{R3}^* + F_{R2} ((\tilde{A}_{L4}^{-1})^* \tilde{F}_{L4}^* - \tilde{L}(\lambda, z) \tilde{F}_{R3}^*) \\ &= -F_{L1} \hat{A}_{L1}^{-1} \tilde{F}_{R3}^* + F_{R2} (\tilde{A}_{L4}^{-1})^* \tilde{F}_{L4}^* + F_{R2} (\hat{L}(\lambda, z) - \tilde{L}(\lambda, z)) \tilde{F}_{R3}^*. \end{aligned}$$

En utilisant à nouveau que  $\hat{L}(\lambda, z) = \tilde{L}(\lambda, z)$  pour tout  $z \in \mathbb{R}$ , on obtient finalement que pour de tels  $z$

$$P_2(X, \lambda, z) = -F_{L1} \hat{A}_{L1}^{-1} \tilde{F}_{R3}^* + F_{R2} (\tilde{A}_{L4}^{-1})^* \tilde{F}_{L4}^*. \quad (2.6.2)$$

Ainsi, les Théorèmes 2.4.6, 2.4.28 et 2.4.33 ainsi que la Section 2.4.4, montrent que ces applications sont bornées sur  $\mathbb{R}$  et  $i\mathbb{R}$ . Finalement, en appliquant le Théorème de

Phragmén-Lindelöf (voir [Boa54], Theorem 1.4.2) sur chaque cadran du plan complexe, on en déduit que les applications  $z \mapsto P_{i,j}(X, \lambda, z)$  sont bornées sur  $\mathbb{C}$ . D'après le Théorème de Liouville on obtient donc que ces applications sont constantes sur  $\mathbb{C}$ . Contrairement à [DN11] nous ne pouvons pas utiliser l'évaluation en  $z = 0$  car on ne possède pas de formule explicite pour  $P(X, \lambda, 0)$ . Pour obtenir que  $P(X, \lambda, z) = \pm I_4$  on utilise les asymptotiques des fonctions de Jost. Pour commencer, par définition

$$P(X, \lambda) \tilde{F}_R(\tilde{h}(X), \lambda, z) = F_R(h(X), \lambda, z),$$

donc

$$P_1(X, \lambda) \tilde{F}_{R1}(\tilde{h}(X), \lambda, z) + P_2(X, \lambda) \tilde{F}_{R3}(\tilde{h}(X), \lambda, z) = F_{R1}(h(X), \lambda, z) \quad (2.6.3)$$

et

$$P_1(X, \lambda) \tilde{F}_{R2}(\tilde{h}(X), \lambda, z) + P_2(X, \lambda) \tilde{F}_{R4}(\tilde{h}(X), \lambda, z) = F_{R2}(h(X), \lambda, z). \quad (2.6.4)$$

Grâce au Théorème 2.4.8, on sait que pour tout  $X \in ]0, A[$  fixé, pour  $z$  réel grand,

$$F_{R1}(h(X), \lambda, z) = \frac{2^{-\nu_-}}{\sqrt{2\pi}} \left( \frac{\kappa_-}{a_-} \right)^{i \frac{(\lambda - c_-)}{\kappa_-}} \Gamma(1 - \nu_-) z^{-i \frac{(\lambda - c_-)}{\kappa_-}} e^{zX} \begin{pmatrix} 1 & O\left(\frac{1}{z}\right) \\ O\left(\frac{1}{z}\right) & 1 \end{pmatrix} [1]_z$$

et

$$F_{R3}(h(X), \lambda, z) = i \frac{2^{-\nu_-}}{\sqrt{2\pi}} \left( \frac{\kappa_-}{a_-} \right)^{i \frac{(\lambda - c_-)}{\kappa_-}} \Gamma(1 - \nu_-) z^{-i \frac{(\lambda - c_-)}{\kappa_-}} e^{zX} \begin{pmatrix} O\left(\frac{1}{z}\right) & 1 \\ -1 & O\left(\frac{1}{z}\right) \end{pmatrix} [1]_z,$$

où

$$[1]_z = 1 + O\left(\frac{1}{z}\right).$$

Ainsi, en posant

$$\alpha = \frac{2^{-\nu_-}}{\sqrt{2\pi}} \left( \frac{\kappa_-}{a_-} \right)^{i \frac{(\lambda - c_-)}{\kappa_-}} \Gamma(1 - \nu_-) \quad \text{et} \quad \tilde{\alpha} = \frac{2^{-\tilde{\nu}_-}}{\sqrt{2\pi}} \left( \frac{\tilde{\kappa}_-}{\tilde{a}_-} \right)^{i \frac{(\lambda - \tilde{c}_-)}{\tilde{\kappa}_-}} \Gamma(1 - \tilde{\nu}_-),$$

on obtient, en utilisant (2.6.3) et en gardant seulement les termes principaux, que pour tout  $X \in ]0, A[$ , pour  $z$  réel grand,

$$\left( \tilde{\alpha} P_1(X, \lambda) I_2 + i \tilde{\alpha} P_2(X, \lambda) \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \right) z^{i \left( \frac{\lambda - c_-}{\kappa_-} - \frac{\lambda - \tilde{c}_-}{\tilde{\kappa}_-} \right)} \sim \alpha I_2.$$

On en déduit que

$$\frac{\lambda - c_-}{\kappa_-} = \frac{\lambda - \tilde{c}_-}{\tilde{\kappa}_-}, \quad (2.6.5)$$

et donc que

$$\nu_- = \tilde{\nu}_- \quad \text{et} \quad \tilde{\mu}_- = \mu_-. \quad (2.6.6)$$

Ainsi,

$$\begin{aligned} \tilde{\alpha} &= \frac{2^{-\tilde{\nu}_-}}{\sqrt{2\pi}} \left( \frac{\tilde{\kappa}_-}{\tilde{a}_-} \right)^{i \frac{(\lambda - \tilde{c}_-)}{\tilde{\kappa}_-}} \Gamma(1 - \tilde{\nu}_-) \\ &= \alpha \left( \frac{\tilde{\kappa}_-}{\tilde{a}_-} \frac{a_-}{\kappa_-} \right)^{i \frac{(\lambda - \tilde{c}_-)}{\tilde{\kappa}_-}}. \end{aligned}$$

Alors, pour tout  $X \in ]0, A[$ ,

$$\left( P_1(X, \lambda) + i P_2(X, \lambda) \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \right) \left( \frac{\tilde{\kappa}_-}{\tilde{a}_-} \frac{a_-}{\kappa_-} \right)^{i \frac{(\lambda - c_-)}{\kappa_-}} = I_2. \quad (2.6.7)$$

De même, on rappelle que, grâce au Théorème 2.4.6, on sait que

$$F_{R2}(h(X), \lambda, z) = i \frac{2^{-\mu_-}}{\sqrt{2\pi}} \left( \frac{\kappa_-}{a_-} \right)^{-i \frac{(\lambda - c_-)}{\kappa_-}} \Gamma(1 - \mu_-) z^{i \frac{(\lambda - c_-)}{\kappa_-}} e^{zX} \begin{pmatrix} O\left(\frac{1}{z}\right) & 1 \\ -1 & O\left(\frac{1}{z}\right) \end{pmatrix} [1]_z,$$

et

$$F_{R4}(h(X), \lambda, z) = \frac{2^{-\mu_-}}{\sqrt{2\pi}} \left( \frac{\kappa_-}{a_-} \right)^{-i \frac{(\lambda - c_-)}{\kappa_-}} \Gamma(1 - \mu_-) z^{i \frac{(\lambda - c_-)}{\kappa_-}} e^{zX} \begin{pmatrix} 1 & O\left(\frac{1}{z}\right) \\ O\left(\frac{1}{z}\right) & 1 \end{pmatrix} [1]_z.$$

Ainsi, en posant

$$\beta = \frac{2^{-\mu_-}}{\sqrt{2\pi}} \left( \frac{\kappa_-}{a_-} \right)^{-i \frac{(\lambda - c_-)}{\kappa_-}} \Gamma(1 - \mu_-),$$

on obtient, en utilisant (2.6.4) et en gardant seulement les termes principaux, que pour tout  $X \in ]0, A[$  et pour  $z$  réel grand

$$\left( i\tilde{\beta}P_1(X, \lambda) \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} + \tilde{\beta}P_2(X, \lambda) \right) z^{i\left(\frac{\lambda-c_-}{\kappa_-} - \frac{\lambda-\tilde{c}_-}{\tilde{\kappa}_-}\right)} \sim i\beta \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Comme pour  $\alpha$  on a

$$\tilde{\beta} = \beta \left( \frac{\tilde{\kappa}_- a_-}{\tilde{a}_- \kappa_-} \right)^{-i\frac{(\lambda-\tilde{c}_-)}{\tilde{\kappa}_-}}.$$

Ainsi

$$\left( iP_1(X, \lambda) \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} + P_2(X, \lambda) \right) \left( \frac{\tilde{\kappa}_- a_-}{\tilde{a}_- \kappa_-} \right)^{-i\frac{(\lambda-c_-)}{\kappa_-}} = i \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

donc

$$\left( P_1(X, \lambda) + iP_2(X, \lambda) \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \right) \left( \frac{\tilde{\kappa}_- a_-}{\tilde{a}_- \kappa_-} \right)^{-i\frac{(\lambda-c_-)}{\kappa_-}} = I_2. \quad (2.6.8)$$

On en déduit, en utilisant les Équations (2.6.7) et (2.6.8), que

$$\left( \frac{\tilde{\kappa}_- a_-}{\tilde{a}_- \kappa_-} \right)^{-i\frac{(\lambda-c_-)}{\kappa_-}} = \left( \frac{\tilde{\kappa}_- a_-}{\tilde{a}_- \kappa_-} \right)^{i\frac{(\lambda-c_-)}{\kappa_-}} = \pm 1. \quad (2.6.9)$$

En utilisant (2.6.5), (2.6.6) et (2.6.9) ainsi que (2.6.1) et (2.6.2) on obtient alors grâce aux asymptotiques des fonctions de Jost que

$$P_1(X, \lambda, z) = \pm I_2 \quad \text{et} \quad P_2(X, \lambda, z) = 0.$$

De même, on montre que

$$P_3(X, \lambda, z) = 0 \quad \text{et} \quad P_4(X, \lambda, z) = \pm I_2.$$

De plus,

$$P_1(X, \lambda, z) = \left( \frac{\tilde{\kappa}_- a_-}{\tilde{a}_- \kappa_-} \right)^{-i\frac{(\lambda-c_-)}{\kappa_-}} I_2 = P_4(X, \lambda, z).$$

Finalement, nous avons donc montré que pour tout  $z \in \mathbb{C}$  et pour tout  $X \in ]0, A[$ ,

$$P(X, \lambda, z) = \pm I_4.$$

### 2.6.2 Preuve du Théorème 2.1.1 sous l'hypothèse (i)

On rappelle que l'on travaille avec l'opérateur

$$H = \Gamma^1 D_x + za(x)\Gamma^2 + b(x)\Gamma^0 + c(x).$$

Puisque l'on travaille avec la variable de Liouville  $X$ , on introduit l'opérateur

$$L = a(X)\Gamma^1 D_X + za(X)\Gamma^2 + b(X)\Gamma^0 + c(X)$$

où on utilise les notations  $a(X) = a(h(X))$ ,  $b(X) = b(h(X))$  et  $c(X) = c(h(X))$ . On note que

$$HF(x, \lambda, z) = \lambda F(x, \lambda, z) \quad \Leftrightarrow \quad LF(h(X), \lambda, z) = \lambda F(h(X), \lambda, z).$$

Ainsi, par définition des fonctions de Jost,

$$\Gamma^1 D_X(F_R(h(X), \lambda, z)) = \left( -z\Gamma^2 - \frac{b(X)}{a(X)}\Gamma^0 - \frac{c(X)}{a(X)} + \frac{\lambda}{a(X)} \right) F_R(h(X), \lambda, z)$$

et de même

$$\Gamma^1 D_X(\tilde{F}_R(\tilde{h}(X), \lambda, z)) = \left( -z\Gamma^2 - \frac{\tilde{b}(X)}{\tilde{a}(X)}\Gamma^0 - \frac{\tilde{c}(X)}{\tilde{a}(X)} + \frac{\lambda}{\tilde{a}(X)} \right) \tilde{F}_R(\tilde{h}(X), \lambda, z).$$

De plus, dans la Section 2.6.1, on a montré que

$$F_R(h(X), \lambda, z) = \pm \tilde{F}_R(\tilde{h}(X), \lambda, z), \quad \forall X \in ]0, A[.$$

Alors, pour tout  $X \in ]0, A[$ ,

$$\left( \left( \frac{\tilde{b}(X)}{\tilde{a}(X)} - \frac{b(X)}{a(X)} \right) \Gamma^0 + \left( \frac{\tilde{c}(X)}{\tilde{a}(X)} - \frac{c(X)}{a(X)} \right) + \lambda \left( \frac{1}{a(X)} - \frac{1}{\tilde{a}(X)} \right) \right) F_R = 0.$$

Grâce à la définition de la matrice

$$\Gamma^0 = \begin{pmatrix} 0 & \sigma \\ \sigma^* & 0 \end{pmatrix} \quad \text{avec} \quad \sigma = \begin{pmatrix} -i & 0 \\ 0 & i \end{pmatrix},$$

on obtient facilement que

$$\left( \begin{pmatrix} \left( \left( \frac{\tilde{c}}{\tilde{a}} - \frac{c}{a} \right) + \lambda \left( \frac{1}{a} - \frac{1}{\tilde{a}} \right) \right) I_2 & \left( \frac{\tilde{b}}{\tilde{a}} - \frac{b}{a} \right) \sigma \\ \left( \frac{\tilde{b}}{\tilde{a}} - \frac{b}{a} \right) \sigma^* & \left( \left( \frac{\tilde{c}}{\tilde{a}} - \frac{c}{a} \right) + \lambda \left( \frac{1}{a} - \frac{1}{\tilde{a}} \right) \right) I_2 \end{pmatrix} F_R(h(X), \lambda, z) = 0. \right.$$

Puisque la fonction de Jost à droite  $F_R$  est inversible on en déduit que,



$$\frac{\tilde{c} - \lambda}{\tilde{a}}(\tilde{h}(X)) = \frac{c - \lambda}{a}(h(X)), \quad \forall X \in ]0, A[ \quad (2.6.10)$$

et

$$\frac{\tilde{b}}{\tilde{a}}(\tilde{h}(X)) = \frac{b}{a}(h(X)), \quad \forall X \in ]0, A[. \quad (2.6.11)$$

Il s'agit de la première affirmation du Théorème 2.1.1. On utilise maintenant la forme explicite des potentiels. On rappelle que, en utilisant la notation  $r = r(h(X))$ ,

$$a(x) = \frac{\sqrt{F(r)}}{r}, \quad b(x) = m\sqrt{F(r)}, \quad c(x) = \frac{qQ}{r}.$$

Ainsi, l'Équation (2.6.11) nous donne que

$$\tilde{r}(\tilde{h}(X)) = r(h(X)).$$

De plus, en utilisant l'Équation (2.6.10),

$$\frac{F(r(h(X)))}{(qQ - \lambda r(h(X)))^2} = \frac{\tilde{F}(\tilde{r}(h(X)))}{(q\tilde{Q} - \lambda \tilde{r}(h(X)))^2}.$$

Ainsi,

$$F(r)(q\tilde{Q} - \lambda r)^2 = \tilde{F}(\tilde{r})(qQ - \lambda \tilde{r})^2.$$

Finalement, en utilisant la définition de  $F$ ,

$$F(r) = 1 - \frac{2M}{r} + \frac{Q^2}{r^2} - \frac{\Lambda r^2}{3}$$

et en identifiant les coefficients de  $r^6$ ,  $r^5$  et  $r^3$  on obtient respectivement

$$\frac{\lambda^2 \Lambda}{3} = \frac{\lambda^2 \tilde{\Lambda}}{3},$$

$$2\lambda q\tilde{Q}\frac{\Lambda}{3} = 2\lambda qQ\frac{\tilde{\Lambda}}{3}$$

et

$$2\lambda q\tilde{Q} + 2M\lambda^2 = 2\lambda qQ + 2\tilde{M}\lambda^2.$$

Si  $\lambda \neq 0$ , ces égalités nous permettent de conclure que,

$$M = \tilde{M}, \quad Q = \tilde{Q}, \quad \Lambda = \tilde{\Lambda}.$$

Si  $\lambda = 0$ ,  $q \neq 0$ , on a

$$F(r)\tilde{Q}^2 = \tilde{F}(r)Q^2.$$

Ainsi, en utilisant la définition de  $F$  on obtient facilement que

$$M = \tilde{M}, \quad Q^2 = \tilde{Q}^2, \quad \Lambda = \tilde{\Lambda}.$$

Alors,

$$F(r) = \tilde{F}(r),$$

et en utilisant (2.6.10) on obtient ainsi que  $Q = \tilde{Q}$ .

Ceci achève la preuve du Théorème 2.1.1. □

### 2.6.3 Preuve du Théorème 2.1.1 sous l'hypothèse (ii)

Le but de cette Section est de prouver le Théorème 2.1.1 si l'assertion (ii) est satisfaite, i.e. de prouver l'unicité des paramètres  $(M, Q, \Lambda)$  d'un trou noir de type RN-dS à partir de la connaissance des coefficients de réflexion  $R(\lambda, n)$  des matrices de diffusion partielles, pour une énergie  $\lambda \in \mathbb{R}$  fixée et pour tout  $n \in \mathcal{L} \subset \mathbb{N}^*$  satisfaisant la condition de Müntz  $\sum_{n \in \mathcal{L}} \frac{1}{n} = \infty$ . La stratégie est exactement celle utilisée précédemment, la seule différence venant du fait que l'égalité  $R(\lambda, n) = \tilde{R}(\lambda, n)$  n'implique pas exactement que  $\hat{R}(\lambda, n) = \tilde{\hat{R}}(\lambda, n)$ .

On considère ainsi deux trous noirs de type RN-dS ayant pour paramètres respectifs  $(M, Q, \Lambda)$  et  $(\tilde{M}, \tilde{Q}, \tilde{\Lambda})$ . On suppose que

$$R(\lambda, n) = \tilde{R}(\lambda, n), \quad \forall n \in \mathcal{L}.$$

Ainsi, en utilisant le lien entre la matrice de diffusion  $S(\lambda)$  et la matrice de diffusion  $\hat{S}(\lambda)$  donné dans la Proposition 2.3.1 on déduit de cette égalité que

$$\hat{R}(\lambda, n)e^{-2i\beta} = \tilde{\hat{R}}(\lambda, n)e^{-2i\tilde{\beta}}, \quad \forall n \in \mathcal{L},$$

où  $\beta$  est la constante définie dans (2.3.11).

**Lemme 2.6.3.** *Supposons que*

$$\hat{R}(\lambda, n)e^{-2i\beta} = \tilde{\hat{R}}(\lambda, n)e^{-2i\tilde{\beta}}, \quad \forall n \in \mathcal{L}.$$

*Alors*

$$A := \int_{\mathbb{R}} a(t) dt = \int_{\mathbb{R}} \tilde{a}(t) dt =: \tilde{A}.$$

*Démonstration.* La preuve de ce Lemme est la même que celle du Lemme 2.6.1. On utilise les Équations (2.1.19), (2.3.5), (2.3.6) et (2.3.8) pour obtenir que

$$\hat{R}(\lambda, n) = -\hat{A}_{L1}(\lambda, n)^{-1}\hat{A}_{L2}(\lambda, n)$$

et

$$\hat{A}_{L1}(\lambda, n)\hat{A}_{L1}(\lambda, n)^* - \hat{A}_{L2}(\lambda, n)\hat{A}_{L2}(\lambda, n)^* = I_2.$$

Ainsi,

$$\begin{aligned} \hat{A}_{L1}(\lambda, n)^* &= \hat{A}_{L1}(\lambda, n)^{-1} - \hat{R}(\lambda, n)\hat{A}_{L2}(\lambda, n)^* \\ &= \hat{A}_{L1}(\lambda, n)^{-1} - e^{2i(\beta-\tilde{\beta})}\tilde{\hat{R}}(\lambda, n)\hat{A}_{L2}(\lambda, n)^* \\ &= \hat{A}_{L1}^{-1} + e^{2i(\beta-\tilde{\beta})} \left( (\tilde{\hat{A}}_{L1}^* - \tilde{\hat{A}}_{L1}^{-1})(\tilde{\hat{A}}_{L2}^*)^{-1} \right) \hat{A}_{L2}^*. \end{aligned}$$

Donc,

$$\hat{A}_{L1}^*(\hat{A}_{L2}^*)^{-1} - \hat{A}_{L1}^{-1}(\hat{A}_{L2}^*)^{-1} = e^{2i(\beta-\tilde{\beta})} \left( \tilde{\hat{A}}_{L1}^*(\tilde{\hat{A}}_{L2}^*)^{-1} - \tilde{\hat{A}}_{L1}^{-1}(\tilde{\hat{A}}_{L2}^*)^{-1} \right).$$

De plus, l'hypothèse implique que,

$$(\hat{R}(\lambda, n)^*)^{-1} = e^{2i(\beta-\tilde{\beta})}(\tilde{\hat{R}}(\lambda, n)^*)^{-1},$$

i.e.

$$\hat{A}_{L1}^*(\hat{A}_{L2}^*)^{-1} = e^{2i(\beta-\tilde{\beta})}\tilde{\hat{A}}_{L1}^*(\tilde{\hat{A}}_{L2}^*)^{-1}.$$

Ainsi,

$$\hat{A}_{L1}^{-1}(\hat{A}_{L2}^*)^{-1} = e^{2i(\beta-\tilde{\beta})}\tilde{\hat{A}}_{L1}^{-1}(\tilde{\hat{A}}_{L2}^*)^{-1}.$$

Finalement, en utilisant les asymptotiques données dans le Théorème 2.4.33, on obtient que  $A = \tilde{A}$ .  $\square$

Ainsi, comme dans la partie précédente, on peut introduire la matrice  $P(X, \lambda, z)$  pour  $X \in ]0, A[$ . Cependant, à cause de la présence du terme  $e^{2i(\beta-\tilde{\beta})}$ , la définition de cette

## 2.6. Preuve du Théorème principal

---

matrice est légèrement différente (mais est celle donnée dans la Section 5 de [DN11] si l'on pose  $c = \beta - \tilde{\beta}$ ). En effet, on définit  $P(X, \lambda, z)$  par

$$P(X, \lambda, z) \tilde{F}_R(\tilde{h}(X), \lambda, z) = F_R(h(X), \lambda, z) e^{i(\beta - \tilde{\beta})\Gamma^1}.$$

La stratégie est à présent exactement la même que celle utilisée précédemment : on doit montrer que la matrice  $P(X, \lambda, z)$  est constante égale à  $\pm I_4$ . Après quelques calculs on obtient que

$$P_1(X, \lambda, z) = e^{i(\beta - \tilde{\beta})} F_{R2} \hat{A}_{R2}^{-1} \tilde{F}_{L1}^* - e^{-i(\beta - \tilde{\beta})} F_{L2} (\tilde{\hat{A}}_{R3}^{-1})^* \tilde{F}_{R1}^*$$

et

$$P_2(X, \lambda, z) = -e^{i(\beta - \tilde{\beta})} F_{R2} \hat{A}_{R2}^{-1} \tilde{F}_{L3}^* + e^{-i(\beta - \tilde{\beta})} F_{L2} (\tilde{\hat{A}}_{R3}^{-1})^* \tilde{F}_{R3}^*.$$

Grâce à ces égalités et aux asymptotiques données dans les Théorèmes 2.4.6, 2.4.28 et 2.4.33, on peut appliquer le Théorème de Phragmén-Lindelöf et le Théorème de Liouville pour obtenir que  $z \mapsto P(X, \lambda, z)$  est constante sur  $\mathbb{C}$ . Ainsi, comme précédemment, on utilise les asymptotiques des fonctions de Jost sur la droite réelle données dans les Théorèmes 2.4.8, 2.4.30 et 2.4.33, pour obtenir que

$$P(X, \lambda, z) = \pm I_4.$$

Finalement, pour achever la preuve du Théorème 2.1.1 dans le cas (ii), on utilise la même procédure que celle utilisée dans la Section 2.6.2.  $\square$



## Problème inverse à énergie fixée : variétés de Stäckel

Dans ce chapitre reprenant l'article [Gob16] on étudie un problème de diffusion inverse à énergie fixée sur des variétés de Stäckel de dimension trois ayant la topologie d'un cylindre torique, satisfaisant la condition de Robertson et possédant une structure asymptotiquement hyperbolique. Sur ces variétés l'équation de Helmholtz peut être séparée en un système constitué d'une équation différentielle ordinaire radiale et de deux équations différentielles ordinaires angulaires. On peut ainsi décomposer l'opérateur de diffusion complet sur des harmoniques généralisées et les matrices de diffusion partielles ainsi obtenues consistent alors en un ensemble dénombrable de matrices  $2 \times 2$  dont les coefficients sont les célèbres coefficients de transmission et de réflexion. Nous montrerons que ces coefficients de réflexion ne sont en réalité rien d'autres que des fonctions de Weyl-Titchmarsh généralisées associées à l'EDO radiale. En utilisant une nouvelle version multivariable de la méthode de Complexification du Moment Angulaire, on montre alors que la connaissance de l'opérateur de diffusion à une énergie fixée non nulle est suffisante pour déterminer de façon unique la métrique de la variété de Stäckel aux obstructions naturelles près.

### 3.1 Introduction et présentation du résultat

Dans ce travail on est intéressé par l'étude d'un problème de diffusion inverse à énergie fixée pour l'équation de Helmholtz sur une variété de Stäckel de dimension trois satisfaisant la condition de Robertson. Les variétés de Stäckel ont été introduites en 1891 par Stäckel dans [Stä91] et sont d'un grand intérêt dans la théorie de séparation des variables. En effet, il est connu que la séparabilité additive de l'équation de Hamilton-Jacobi pour le flot géodésique sur une variété riemannienne est équivalente au fait que la métrique soit sous forme de Stäckel. Cependant, pour obtenir la séparabilité multiplicative de l'équation de Helmholtz on doit également supposer que la condition de Robertson est satisfaite. Comme nous allons le voir dans un bref résumé de la théorie de séparation des variables, il existe également des caractérisations intrinsèques de la séparabilité des équations de Hamilton-Jacobi et de Helmholtz en termes de tenseurs de Killing (qui correspondent à des symétries faibles) ou d'opérateurs de symétries. On renvoie à [BCR02a, BCR02b, CR06, Eis34, Eis97, KM82, KM80, KM84, Stä93] pour d'importantes contributions dans ce domaine et à [Ben15, Mil88] pour un état de l'art sur ces questions. On insiste sur le fait que la description des variétés riemanniennes donnée par Stäckel est locale. On obtient une description globale de ces variétés en choisissant un système de coordonnées global ce qui justifie l'appellation "variétés de Stäckel" dans notre étude. On choisit de travailler avec des variétés de Stäckel  $(\mathcal{M}, g)$  ayant la topologie d'un cylindre torique. Pour pouvoir définir l'opérateur de diffusion sur ces variétés, on ajoute de plus une structure asymptotiquement hyperbolique, introduite dans [IK14] (voir aussi [GSB09, JSB00, SB05]), aux deux bouts radiaux de notre cylindre. On peut alors définir l'opérateur de diffusion  $S_g$  et ainsi la matrice de diffusion  $S_g(\lambda)$  à une énergie fixée  $\lambda \neq 0$  associée à l'équation de Helmholtz sur  $(\mathcal{M}, g)$  qui est l'objet principal de ce chapitre. La question que nous posons est alors la suivante :

*Est-ce-que la matrice de diffusion  $S_g(\lambda)$  à une énergie fixée  $\lambda \neq 0$  détermine de façon unique la métrique  $g$  de la variété de Stäckel ?*

On rappelle que les problèmes de diffusion inverse à énergie fixée sur des variétés asymptotiquement hyperboliques sont étroitement reliés au problème de Calderón anisotrope pour des variétés riemanniennes compactes à bord. On renvoie à [GT13, IK14, KKL01, KS14, Sal13, Uhl09] pour un état de l'art concernant cette question. L'un des buts de ce chapitre est ainsi de donner des exemples de variétés pour lesquelles nous sommes capables de résoudre le problème de diffusion inverse à énergie fixée mais qui ne possèdent pas l'une des structures particulières pour lesquelles la question de l'unicité pour le problème de Calderón anisotrope sur des variétés compactes à

bord est résolue. On note que le résultat que nous prouvons ici est un résultat d'unicité. Nous sommes également intéressé par l'obtention d'un résultat de stabilité c'est-à-dire par l'étude de la continuité de l'application  $g \mapsto S_g(\lambda)$ . Cette question pourra faire l'objet d'un travail futur.

L'outil principal de ce chapitre consiste à complexifier les moments angulaires couplés apparaissant lors de la procédure de séparation des variables. En effet, grâce à la séparation des variables, la matrice de diffusion à énergie fixée peut être décomposée en un ensemble de coefficients de diffusion indexé par un ensemble discret formé de *deux* moments angulaires qui correspondent aux *deux* constantes de séparation. Moralement, le but de la méthode de Complexification du Moment Angulaire est le suivant : à partir d'un ensemble discret d'informations (ici l'égalité des coefficients de réflexion sur le spectre couplé) on veut obtenir un régime continu d'informations (ici l'égalité de ces fonctions sur  $\mathbb{C}^2$ ). Cette méthode est composée de trois étapes. On commence par autoriser le moment angulaire à prendre des valeurs complexes. On utilise alors des résultats d'unicité d'analyse complexe pour des fonctions appartenant à certaines classes de fonctions holomorphes afin d'obtenir l'égalité des données correspondantes (qui n'ont plus de sens physique) sur le plan complexe. Enfin, on utilise cette nouvelle information pour résoudre notre problème inverse à l'aide du Théorème de Borg-Marchenko. L'idée générale de considérer un moment angulaire complexe prend sa source dans un travail de Regge (voir [Reg59]) concernant l'étude de la matrice de diffusion pour des opérateurs de Schrödinger dans  $\mathbb{R}^3$  ayant des potentiels à symétrie sphérique. On renvoie également à [dAR65, New02] pour des ouvrages traitant de cette méthode. Cet outil a déjà été utilisé dans le domaine des problèmes inverses pour un moment angulaire dans [DGN13, DKN14, DKN15, DN13, DN11, DN15, Gob15, Ram99] et l'on note qu'il est également utilisé en physique à hautes énergies (voir [Col77]). Dans ce travail on utilise une nouvelle version (car multivariable) de la méthode de Complexification du Moment Angulaire pour *deux moments angulaires* qui correspondent aux constantes de séparation pour l'équation de Helmholtz. On note que l'on est obligé d'utiliser cette version multivariable car ces deux moments angulaires (qui correspondent également au spectre couplé d'opérateurs qui commutent) ne sont pas indépendant et ne peuvent pas être considérés séparément. Ce travail est un prolongement de l'article [DKN14] de Daudé, Kamran et Nicoleau dans lequel les auteurs traitent la même question pour les surfaces de Liouville qui correspondent aux variétés de Stäckel en deux dimensions.



### 3.1.1 Rappels sur la théorie de séparation des variables

Dans cette partie on propose un bref rappel de la théorie de séparation des variables et des principaux résultats connus dans ce domaine. On renvoie à [Ben15, Mil88] et à l'introduction de [BCR02a] pour un état de l'art concernant ce domaine. Soit  $(\mathcal{M}, g)$  une variété riemannienne de dimension  $n$ . Sur  $(\mathcal{M}, g)$ , nous sommes intéressés par l'équation de Hamilton-Jacobi

$$\nabla W \cdot \nabla W = E, \quad (3.1.1)$$

où  $E$  est un paramètre constant et  $\nabla$  est l'opérateur gradient

$$(\nabla W)^i = g^{ij} \partial_j W,$$

où l'on a utilisé la convention de sommation d'Einstein. On est également intéressé par l'équation de Helmholtz

$$-\Delta_g \psi = E\psi. \quad (3.1.2)$$

où  $\Delta_g$  est l'opérateur de Laplace-Beltrami

$$\Delta_g \psi = g^{ij} \nabla_i \nabla_j \psi,$$

où  $\nabla_j$  désigne la dérivée covariante par rapport à la connexion de Levi-Civita. On note que, comme ceci est montré dans [BCR02a], on peut ajouter un potentiel  $V$  satisfaisant de bonnes conditions à ces équations sans plus de complications dans la théorie que nous décrivons ici. Il est connu que, dans beaucoup de cas intéressants, ces équations admettent des solutions locales séparées de la forme

$$W(\underline{x}, \underline{c}) = \sum_{i=1}^n W_i(x^i, \underline{c}),$$

pour l'équation de Hamilton-Jacobi et de la forme

$$\psi(\underline{x}, \underline{c}) = \prod_{i=1}^n \psi_i(x^i, \underline{c}),$$

pour l'équation de Helmholtz, où  $\underline{x} = \{x^i\}$  est un système de coordonnées adapté sur  $\mathcal{M}$  et  $\underline{c}$  désigne un ensemble de paramètres constants dont le nombre dépend d'une bonne définition de la séparation (voir ci-dessous). La raison pour laquelle nous sommes intéressés par de telles solutions réside dans le fait qu'il arrive que pour des solutions de ce type, les Équations (3.1.1)-(3.1.2) deviennent équivalentes à des systèmes d'équations

différentielles ordinaires séparées, chacune agissant sur une seule coordonnée. Dans ce travail nous étudions le cas particulier de la séparation orthogonale, i.e. lorsque  $g^{ij} = 0$  pour  $i \neq j$ . On rappelle à présent la définition de la séparation des variables pour les équations de Hamilton-Jacobi et de Helmholtz.

**Définition 3.1.1** ([BCR02a]). *L'équation de Hamilton-Jacobi est séparable dans les coordonnées  $\underline{x} = \{x^i\}$  si elle admet une solution séparée complète, i.e. une solution du type*

$$W(\underline{x}, \underline{c}) = \sum_{i=1}^n W_i(x^i, \underline{c}),$$

dépendant de  $n$  paramètres  $\underline{c} = (c_j)$  satisfaisant la condition de complétude

$$\det \left( \frac{\partial p_i}{\partial c_j} \right) \neq 0, \quad \text{où } p_i = \partial_i W.$$

**Définition 3.1.2** ([BCR02a], Définition 4.1). *L'équation de Helmholtz est séparable en les coordonnées  $\underline{x} = \{x^i\}$  si elle admet une solution séparée complète, i.e. une solution de la forme*

$$\psi(\underline{x}, \underline{c}) = \prod_{i=1}^n \psi_i(x^i, \underline{c}),$$

dépendant de  $2n$  paramètres  $\underline{c} = (c_j)$  satisfaisant la condition de complétude

$$\det \begin{pmatrix} \frac{\partial u_i}{\partial c_j} \\ \frac{\partial v_i}{\partial c_j} \end{pmatrix} \neq 0, \quad \text{où } u_i = \frac{\psi'_i}{\psi_i} \quad \text{et } v_i = \frac{\psi''_i}{\psi_i}.$$

On rappelle maintenant les résultats prouvés par Stäckel, Robertson et Eisenhart à la fin du dix-huitième siècle et au début du dix-neuvième siècle qui :

1. Caractérisent les variétés riemanniennes admettant une séparation des variables orthogonale.
2. Font le lien entre la séparation des variables pour les équations de Hamilton-Jacobi et de Helmholtz.

**Définition 3.1.3** (Matrice de Stäckel). *Une matrice de Stäckel est une matrice  $n \times n$  régulière  $S(\underline{x}) = (s_{ij}(x^i))$  dont les composantes  $s_{ij}(x^i)$  sont des fonctions dépendant uniquement de la variable correspondant au numéro de ligne.*

**Théoreme 3.1.1** (Stäckel 1893, [Stä93]). *L'équation de Hamilton-Jacobi est séparable*

dans des coordonnées orthogonales  $\underline{x}$  si et seulement si la métrique  $g$  est de la forme

$$g = H_1^2(dx^1)^2 + H_2^2(dx^2)^2 + H_3^2(dx^3)^2,$$

où

$$H_i^2 = \frac{\det(S)}{s_{i1}}, \quad \forall i \in \{1, 2, 3\},$$

où  $s^{i1}$  est le mineur associé au coefficient  $s_{i1}$ , pour tout  $i \in \{1, 2, 3\}$ .

**Théoreme 3.1.2** (Robertson 1927, [Rob28]). *L'équation de Helmholtz est séparable dans des coordonnées orthogonales  $\underline{x}$  si et seulement si dans ces coordonnées l'équation de Hamilton-Jacobi est séparable et de plus la condition suivante est satisfaite*

$$\frac{\det(S)^2}{|g|} = \frac{\det(S)^2}{\prod_{i=1}^n H_i^2} = \prod_{i=1}^n f_i(x^i), \quad (3.1.3)$$

où les  $f_i(x^i)$  sont des fonctions arbitraires dépendant uniquement de la coordonnée correspondante et  $|g|$  est le déterminant de la métrique  $g$ .

Grâce à cet énoncé on voit qu'une bonne compréhension du mécanisme de séparation des variables pour l'équation de Helmholtz dépend d'une bonne compréhension du problème correspondant pour l'équation de Hamilton-Jacobi et l'on note que la séparabilité de l'Helmholtz est plus exigeante. La condition supplémentaire (3.1.3) dans le Théorème 3.1.2 est appelée *condition de Robertson*. Cette condition à un sens géométrique donnée par la caractérisation suivante due à Eisenhart.

**Théoreme 3.1.3** (Eisenhart 1934, [Eis34]). *La condition de Robertson (3.1.3) est satisfaite si et seulement si dans un système de coordonnées orthogonal  $\underline{x}$  le tenseur de Ricci est diagonal :*

$$R_{ij} = 0, \quad \forall i \neq j.$$

**Remarque 3.1.4.** *On note que la condition de Robertson est satisfaite par les variétés de type Einstein. En effet, une variété de type Einstein est une variété riemannienne dont le tenseur de Ricci est proportionnel au tenseur métrique qui est diagonal dans le cas orthogonal que nous étudions.*

Comme cela à été montré par Eisenhart dans [Eis34, Eis97] et par Kalnins et Miller dans [KM80] la séparabilité de l'équation de Hamilton-Jacobi pour le flot géodésique est reliée à l'existence de tenseurs de Killing d'ordre deux dont la présence traduit l'existence de symétries cachées. On suit ainsi [Ben15, KM80] dans le but d'étudier cette relation.

### 3.1. Introduction et présentation du résultat

---

On utilise la structure symplectique naturelle sur le fibré cotangent  $T^*\mathcal{M}$  de la variété  $(\mathcal{M}, g)$ . Soit  $\{x^i\}$  un système de coordonnées locales sur  $\mathcal{M}$  et  $\{x^i, p_i\}$  les coordonnées associées sur  $T^*\mathcal{M}$ . Soit

$$H = g^{ij} p_i p_j,$$

le hamiltonien géodésique sur  $T^*\mathcal{M}$ . L'équation de Hamilton-Jacobi peut alors être écrite comme

$$H(x^i, \partial_i W) = E.$$

Grâce à ce formalisme, une autre condition nécessaire et suffisante pour la séparabilité de l'équation de Hamilton-Jacobi à été obtenue par Levi-Civita. On énonce ici la version donnée dans [Ben15].

**Théoreme 3.1.5** (Levi-Civita 1904, [LC04]). *L'équation de Hamilton-Jacobi*

$$H(x^i, \partial_i W) = E,$$

*admet une solution séparée si et seulement si les équations différentielles suivantes, connues comme étant les équations de séparabilité de Levi-Civita,*

$$L_{ij}(H) := \partial_i H \partial_j H \partial^i \partial^j H + \partial^i H \partial^j \partial_i \partial_j H - \partial_i H \partial^j H \partial^i \partial_j H - \partial^i H \partial_j H \partial_i \partial^j H = 0,$$

*où  $\partial_i = \frac{\partial}{\partial x^i}$  et  $\partial^i = \frac{\partial}{\partial p_i}$ , sont identiquement satisfaites.*

**Remarque 3.1.6.** *Ce Théorème nous donne une manière simple de tester si un système de coordonnées est séparable ou non. De plus, il fournit également une base pour une caractérisation géométrique (i.e. intrinsèque) de la séparation.*

Puisque nous sommes intéressés par une caractérisation de la séparabilité de l'équation de Hamilton-Jacobi utilisant des tenseurs de Killing, nous rappelons ici quelques propriétés élémentaires de ces objets en suivant la deuxième Section de [Ben15]. On commence par rappeler que les tenseurs symétriques contravariants  $\mathbf{K} = (K^{i\dots j})$  sur  $\mathcal{M}$  sont en correspondance biunivoque avec les polynômes homogènes sur  $T^*\mathcal{M}$  par la relation,

$$P_{\mathbf{K}} = P(\mathbf{K}) = K^{i\dots j} p_i \dots p_j.$$

**Exemple 3.1.1.** *Le hamiltonien  $H$  correspond au tenseur métrique contravariant  $\mathbf{G}$ .*

L'espace de ces fonctions polynomiales est fermé par rapport au crochet de Poisson canonique

$$\{A, B\} := \partial^i A \partial_i B - \partial^i B \partial_i A.$$

On définit alors la structure d'algèbre de Lie  $[\cdot, \cdot]$  sur l'espace des tenseurs symétriques contravariants en posant,

$$P([\mathbf{K}_1, \mathbf{K}_2]) = \{P(\mathbf{K}_1), P(\mathbf{K}_2)\}.$$

**Définition 3.1.4.** Soit  $\mathbf{G}$  un tenseur métrique. On dit que  $\mathbf{K}$  est un tenseur de Killing si  $P(\mathbf{K})$  est en involution avec  $P_{\mathbf{G}} = P(\mathbf{G}) = H$ , i.e.

$$\{P(\mathbf{K}), P(\mathbf{G})\} = 0.$$

Cette équation est, par définition, équivalente à l'équation de Killing,

$$[\mathbf{K}, \mathbf{G}] = 0.$$

**Remarque 3.1.7.** 1. Ceci veut dire que si  $\mathbf{K}$  est un tenseur de Killing,  $P(\mathbf{K})$  est une intégrale première du flot géodésique.

2. Un champ de vecteurs  $\mathbf{X}$  est un champ de Killing, i.e.  $[\mathbf{X}, \mathbf{G}] = 0$ , si et seulement si son flot est préservé par la métrique.

On considère à présent le cas d'un 2-tenseur symétrique  $\mathbf{K}$ . Grâce à la présence d'un tenseur métrique,  $\mathbf{K}$  peut être représenté en composantes comme étant un tenseur de type  $(2, 0)$ ,  $(1, 1)$  ou  $(0, 2)$ , et est alors respectivement noté  $\mathbf{K} = (K^{ij}) = (K_j^i) = (K_{ij})$ . En tant que tenseur symétrique de type  $(1, 1)$ ,  $\mathbf{K}$  définit un endomorphisme de l'espace  $\chi(\mathcal{M})$  des champs de vecteurs sur  $\mathcal{M}$  ainsi qu'un endomorphisme de l'espace  $\Phi^1(\mathcal{M})$  des 1-formes sur  $\mathcal{M}$ . On désigne par  $\mathbf{K}\mathbf{X}$  le champ de vecteurs image de  $\mathbf{X} \in \chi(\mathcal{M})$  par  $\mathbf{K}$  et par  $\mathbf{K}\phi$  la 1-forme image de  $\phi \in \Phi^1(\mathcal{M})$  par  $\mathbf{K}$ . En d'autres termes,

$$\mathbf{K}\mathbf{X} = K_j^i X^j \partial_i \quad \text{et} \quad \mathbf{K}\phi = K_j^i \phi_i dx^j.$$

Le 2-tenseur  $\mathbf{K}$  possède alors des valeurs propres, des fonctions propres et des formes propres définies par les équations  $\mathbf{K}\mathbf{X} = \rho\mathbf{X}$  et  $\mathbf{K}\phi = \rho\phi$ . Finalement, on désigne par  $\mathbf{K}_1\mathbf{K}_2$  le produit des deux endomorphismes  $\mathbf{K}_1$  et  $\mathbf{K}_2$  dont l'expression en composantes est  $(\mathbf{K}_1\mathbf{K}_2) = K_1^{ih} K_{2h}^j$ . Le commutateur algébrique de deux tenseurs est alors défini par

$$[\mathbf{K}_1, \mathbf{K}_2] := \mathbf{K}_1\mathbf{K}_2 - \mathbf{K}_2\mathbf{K}_1.$$

La premier lien entre la séparation des variables pour l'équation de Hamilton-Jacobi et l'existence de tenseurs de Killing est alors donné par la Proposition suivante.

**Proposition 3.1.8** ([BF80, KM80, Koo80]). *À tout système de coordonnées orthogonal  $\{x^i\}$  permettant la séparation des variables pour l'équation de Hamilton-Jacobi, il correspond  $n - 1$  tenseurs de Killing d'ordre 2,  $\mathbf{K}_1, \dots, \mathbf{K}_{n-1}$ , en involution, i.e.  $[\mathbf{K}_i, \mathbf{K}_j] = 0$ , et tels que  $\{H, P_{\mathbf{K}_1}, \dots, P_{\mathbf{K}_{n-1}}\}$  est linéairement indépendant. Les solutions séparables*

$$W = \sum_{k=1}^n W^{(k)}(x^k)$$

*sont caractérisées par les relations*

$$H(x^i, p_i) = E \quad \text{et} \quad P_{\mathbf{K}_l}(x^i, p_i) = \lambda_l, \quad \text{où} \quad l = 1, \dots, n-1 \quad \text{et} \quad p_i = \partial_{x^i} W,$$

*où  $\lambda_1, \dots, \lambda_{n-1}$  sont les constantes de séparation.*

**Remarque 3.1.9.** *Dans le langage de la mécanique hamiltonienne, les tenseurs de Killing correspondent à des intégrales premières du système. Le lien mentionné dans la Proposition précédente énonce donc que, si l'équation de Hamilton-Jacobi est séparable, alors le système hamiltonien correspondant est complètement intégrable (voir [Arn13]).*

Bien qu'à tout système séparable il corresponde une famille de  $n - 1$  tenseurs de Killing en involution, il existe également des familles de tenseurs de Killing en involution qui ne sont pas liées à des systèmes séparables. On a donc besoin de trouver des conditions supplémentaires pour caractériser les familles admissibles de tenseurs de Killing. De telles conditions sont données par les deux Théorèmes suivants.

**Théoreme 3.1.10** ([BCR02a] Théorème 7.15). *L'équation de Hamilton-Jacobi est orthogonalement séparable si et seulement si il existe  $n$  tenseurs de Killing indépendants  $(\mathbf{K}_i)$  commutant deux à deux en tant qu'opérateurs linéaires, i.e.  $[\mathbf{K}_i, \mathbf{K}_j] = 0$ , pour tout  $i \neq j$ , et en involution, i.e.  $[\mathbf{K}_i, \mathbf{K}_j] = 0$ , pour tout  $i \neq j$ .*

**Théoreme 3.1.11** ([BCR02a] Théorème 7.16). *L'équation de Helmholtz est orthogonalement séparable si et seulement si il existe  $n$  tenseurs de Killing indépendants  $(\mathbf{K}_i)$  commutant deux à deux en tant qu'opérateurs linéaires, en involution et commutant avec le tenseur de Ricci (condition de Robertson).*

Comme cela est montré dans [BCR02a, BCR02b, KM80] et rappelé dans [Ben15] il existe des reformulations équivalentes du Théorème 3.1.10. On commence par rappeler la définition d'un champ de vecteurs normal.

**Définition 3.1.5.** *Un champ de vecteurs  $\mathbf{X}$  sur une variété riemannienne  $\mathcal{M}$  est dit*

normal s'il est orthogonalement intégrable, i.e. s'il est orthogonal à un feuilletage de  $\mathcal{M}$  par des hypersurfaces.

**Théoreme 3.1.12** ([KM80, Ben93, Ben15]). *L'équation géodésique de Hamilton-Jacobi est séparable dans des coordonnées orthogonales si et seulement si il existe un 2-tenseur de Killing ayant des valeurs propres simples et des vecteurs propres normaux.*

**Définition 3.1.6.** *Un tenseur de Killing possédant ces propriétés est dit tenseur de Killing caractéristique.*

On peut montrer qu'un tenseur de Killing caractéristique engendre un espace de Killing-Stäckel, i.e. un espace vectoriel de dimension  $n$  de 2-tenseurs de Killing dont les éléments commutent en tant qu'opérateurs linéaires et sont en involution. Ainsi, le Théorème 3.1.10 est une conséquence immédiate du Théorème 3.1.12.

On conclut cette Section par une caractérisation intrinsèque de la séparabilité de l'équation de Helmholtz utilisant des opérateurs de symétries donnée dans [KM84]. On commence par rappeler la correspondance biunivoque entre les opérateurs du second ordre et les 2-tenseur de Killing. Nous avons déjà vu que les tenseurs symétriques contravariants sont en correspondance biunivoque avec les polynômes homogènes sur  $T^*\mathcal{M}$ . De plus, l'opérateur  $\hat{P}_{\mathbf{K}}$  correspondant à un polynôme homogène de degré deux

$$P_{\mathbf{K}} = K^{ij}p_i p_j$$

associé au 2-tenseur symétrique contravariant  $\mathbf{K}$  sur  $\mathcal{M}$  est définie par

$$\hat{P}_{\mathbf{K}}\psi = -\Delta_{\mathbf{K}}\psi = -\nabla_i(K^{ij}\nabla_j\psi).$$

On note que, si  $\mathbf{K} = \mathbf{G}$  est le tenseur métrique contravariant, on obtient l'opérateur de Laplace-Beltrami  $\Delta_g = \hat{P}_{\mathbf{G}}$ .

**Définition 3.1.7** ([KM84]). *On dit qu'un opérateur de symétrie de second ordre  $\hat{P}$  est sous forme auto-adjointe s'il peut s'exprimer sous la forme*

$$\hat{P} = \frac{1}{\sqrt{|g|}} \sum_{i,j} \partial_i \left( \sqrt{|g|} a^{ij} \partial_j \right) + c,$$

où  $|g|$  est le déterminant de la métrique,  $a^{ij} = a^{ji}$ , pour tout  $(i, j) \in \{1, \dots, n\}^2$ , et  $c$  est une constante réelle.

**Remarque 3.1.13.** *Si  $\hat{P}$  est un opérateur de second ordre autoadjoint on peut lui associer une forme quadratique sur  $T^*\mathcal{M}$  définie par  $P = a^{ij}p_i p_j$ .*

**Théoreme 3.1.14** ([KM84] Théorème 3). *Il existe un système de coordonnées orthogonal séparable  $\{x^i\}$  pour l'équation de Helmholtz si et seulement si il existe un ensemble linéairement indépendant  $\{\hat{P}_1 = \Delta_g, \hat{P}_2, \dots, \hat{P}_n\}$  d'opérateurs différentiels du second ordre sur  $\mathcal{M}$  tel que :*

1.  $[\hat{P}_i, \hat{P}_j] := \hat{P}_i \hat{P}_j - \hat{P}_j \hat{P}_i = 0$ , pour tout  $1 \leq i, j \leq n$ .
2. Chaque  $\hat{P}_i$  est sous forme auto-adjointe.
3. Il existe une base  $\{\omega_{(j)}, 1 \leq j \leq n\}$  de formes propres communes pour  $\{P_i\}$ .
4. (Condition de Robertson) Les 2-tenseurs de Killing associés  $(\mathbf{K}_i)$  commutent avec le tenseur de Ricci.

Si ces conditions sont satisfaites alors il existe des fonctions  $g^i(x)$  telles que  $\omega_{(j)} g^j dx^j$ , pour  $j = 1, \dots, n$ .

Dans notre travail nous donnerons explicitement les opérateurs  $\hat{P}_1 = \Delta_g$ ,  $\hat{P}_2$  et  $\hat{P}_3$  correspondant à notre étude. On note enfin qu'il existe une notion plus générale de séparabilité appelée la  $R$ -séparation (voir par exemple [KM84, BCR02a, BCR02b]). Notre notion de séparabilité correspond au cas  $R = 1$ . L'étude de la  $R$ -séparabilité dans notre cadre de travail pourra faire l'objet d'un travail futur.

### 3.1.2 Description du modèle

Le but de cette Section est d'introduire le cadre de travail de ce chapitre. Plus précisément, on donne la définition des variétés de Stäckel que l'on considère et on montre que l'on peut faire, sans perte de généralité, certaines hypothèses sur les variétés de Stäckel que l'on étudie.

On commence cette Section par la définition de la structure de Stäckel et la description des variétés que l'on considère. On commence par rappeler que la description des variétés riemanniennes donnée par Stäckel est locale. On obtient une description globale de ces variétés en choisissant un système de coordonnées de Stäckel global ce qui justifie l'appellation "variétés de Stäckel". On considère ainsi des variétés ayant la topologie d'un cylindre torique avec deux bouts munies d'une carte globale

$$\mathcal{M} = (0, A)_{x^1} \times \mathcal{T}_{x^2, x^3}^2,$$

où  $\mathcal{T}_{x^2, x^3}^2 =: \mathcal{T}^2$  désigne le tore de dimension deux. La variable  $x^1$  est la variable radiale alors que  $(x^2, x^3)$  désigne les variables angulaires. On insiste sur le fait que nous avons



choisi de travailler avec des variables angulaires vivant dans le tore de dimension deux mais il est également possible de choisir d'autres topologies. Par exemple, le cas de variables angulaires vivant dans une 2-sphère pourra faire l'objet d'un travail futur. On définit une matrice de Stäckel de taille  $3 \times 3$  de la forme

$$S = \begin{pmatrix} s_{11}(x^1) & s_{12}(x^1) & s_{13}(x^1) \\ s_{21}(x^2) & s_{22}(x^2) & s_{23}(x^2) \\ s_{31}(x^3) & s_{32}(x^3) & s_{33}(x^3) \end{pmatrix},$$

où les coefficients  $s_{ij}$  sont des fonctions lisses. On munit  $\mathcal{M}$  de la métrique riemannienne

$$g = H_1^2(dx^1)^2 + H_2^2(dx^2)^2 + H_3^2(dx^3)^2, \quad (3.1.4)$$

avec

$$H_i^2 = \frac{\det(S)}{s^{i1}}, \quad \forall i \in \{1, 2, 3\},$$

où  $s^{i1}$  est le mineur (avec signe) associé au coefficient  $s_{i1}$  pour tout  $i \in \{1, 2, 3\}$ .

**Remarque 3.1.15.** *La métrique  $g$  est riemannienne si et seulement si le déterminant de la matrice de Stäckel  $S$  et les mineurs  $s^{11}$ ,  $s^{21}$  et  $s^{31}$  ont le même signe. De plus, si l'on développe le déterminant par rapport à la première colonne, on note que si l'on suppose que  $s_{11}$ ,  $s_{21}$  et  $s_{31}$  sont des fonctions positives et si les mineurs  $s^{11}$ ,  $s^{21}$  et  $s^{31}$  ont le même signe, alors le déterminant de  $S$  est nécessairement du même signe que ces mineurs.*

On insiste sur le fait que l'application  $S \mapsto g$  n'est pas injective. En effet, on décrit ici deux invariances de la métrique qui seront utiles dans la résolution de notre problème inverse.

**Proposition 3.1.16** (Invariances de la métrique). *Soit  $S$  une matrice de Stäckel.*

1. *Soit  $G$  une matrice  $2 \times 2$  constante. La matrice de Stäckel*

$$\hat{S} = \begin{pmatrix} s_{11}(x^1) & \hat{s}_{12}(x^1) & \hat{s}_{13}(x^1) \\ s_{21}(x^2) & \hat{s}_{22}(x^2) & \hat{s}_{23}(x^2) \\ s_{31}(x^3) & \hat{s}_{32}(x^3) & \hat{s}_{33}(x^3) \end{pmatrix},$$

*satisfaisant*

$$\begin{pmatrix} s_{i2} & s_{i3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \hat{s}_{i2} & \hat{s}_{i3} \end{pmatrix} G, \quad \forall i \in \{1, 2, 3\}.$$

*possède la même métrique que  $S$ .*

2. La matrice de Stäckel

$$\hat{S} = \begin{pmatrix} \hat{s}_{11}(x^1) & s_{12}(x^1) & s_{13}(x^1) \\ \hat{s}_{21}(x^2) & s_{22}(x^2) & s_{23}(x^2) \\ \hat{s}_{31}(x^3) & s_{32}(x^3) & s_{33}(x^3) \end{pmatrix},$$

avec,

$$\begin{cases} \hat{s}_{11}(x^1) = s_{11}(x^1) + C_1 s_{12}(x^1) + C_2 s_{13}(x^1) \\ \hat{s}_{21}(x^2) = s_{21}(x^2) + C_1 s_{22}(x^2) + C_2 s_{23}(x^2) \\ \hat{s}_{31}(x^3) = s_{31}(x^3) + C_1 s_{32}(x^3) + C_2 s_{33}(x^3) \end{cases}, \quad (3.1.5)$$

où  $C_1$  et  $C_2$  sont des constantes réelles, possède le même métrique que  $S$ .

*Démonstration.* On rappelle que

$$g = \sum_{i=1}^3 H_i^2 (dx^i)^2 \quad \text{avec} \quad H_i^2 = \frac{\det(S)}{s^{i1}} \quad \forall i \in \{1, 2, 3\}.$$

1. Le résultat est une conséquence immédiate des égalités,

$$s^{i1} = \det(G) \hat{s}^{i1}, \quad \forall i \in \{1, 2, 3\}, \quad \text{et} \quad \det(S) = \det(G) \det(\hat{S}).$$

2. Le résultat provient des égalités,

$$s^{i1} = \hat{s}^{i1}, \quad \forall i \in \{1, 2, 3\}, \quad \text{et} \quad \det(S) = \det(\hat{S}).$$

□

Puisque nous sommes seulement intéressés par la récupération de la métrique  $g$  de la variété de Stäckel, on peut choisir n'importe quel représentant dans la classe d'équivalence décrite par les invariances de la Proposition précédente. Ceci nous autorise à faire quelques hypothèses sur la matrice de Stäckel que l'on considère comme nous pouvons le voir dans la Proposition suivante.

**Proposition 3.1.17.** *Soit  $S$  une matrice de Stäckel ayant pour métrique  $g_S$ . Alors il existe une matrice de Stäckel  $\hat{S}$  telle que  $g_{\hat{S}} = g_S$  et*

$$(C) \quad \begin{cases} \hat{s}_{12}(x^1) > 0 & \text{et} & \hat{s}_{13}(x^1) > 0, & \forall x^1 \\ \hat{s}_{22}(x^2) < 0 & \text{et} & \hat{s}_{23}(x^2) > 0, & \forall x^2 \\ \hat{s}_{32}(x^3) > 0 & \text{et} & \hat{s}_{33}(x^3) < 0, & \forall x^3 \\ \lim_{x^1 \rightarrow 0} s_{12}(x^1) = \lim_{x^1 \rightarrow 0} s_{13}(x^1) = 1 \end{cases}.$$

*Démonstration.* Voir Section 3.6.1. □

**Remarque 3.1.18.** La condition (C) possède des conséquences intéressantes qui seront utiles pour notre analyse.

1. On note que si la condition (C) est satisfaite,  $s^{21} = s_{13}s_{32} - s_{12}s_{33}$  et  $s^{31} = s_{12}s_{23} - s_{13}s_{22}$  sont strictement positifs. Ainsi, puisque la métrique  $g$  doit être riemannienne on doit également avoir  $\det(S) > 0$  et  $s^{11} > 0$ .
2. On remarque que, puisque  $s_{22}, s_{33} < 0$  et  $s_{23}, s_{32} > 0$ ,

$$s^{11} > 0 \quad \Leftrightarrow \quad s_{22}s_{33} > s_{23}s_{32} \quad \Leftrightarrow \quad \frac{s_{22}}{s_{23}} < \frac{s_{32}}{s_{33}}.$$

Nous utiliserons ces relations plus tard au cours de notre étude du spectre couplé des opérateurs  $H$  et  $L$  qui correspondent aux opérateurs de symétries de  $\Delta_g$  introduit dans la Section 3.1.1.

À partir de maintenant, et sans perte de généralité, nous supposons que la matrice de Stäckel  $S$  satisfait la condition (C).

Sur la variété de Stäckel  $(\mathcal{M}, g)$  on est intéressé par l'étude de l'équation de Helmholtz

$$-\Delta_g f = \lambda^2 f.$$

Comme nous l'avons vu dans la Section 3.1.1 la structure de Stäckel n'est pas suffisante pour obtenir la séparabilité multiplicative de l'équation de Helmholtz. En effet, nous devons également supposer que la condition de Robertson est satisfaite. On rappelle que cette condition peut être définie de la façon suivante.

**Définition 3.1.8** (Condition de Robertson). *Pour tout  $i \in \{1, 2, 3\}$ , il existe  $f_i(x^i)$ , fonction seulement de  $x^i$ , telles que*

$$\frac{s^{11}s^{21}s^{31}}{\det(S)} = f_1 f_2 f_3. \quad (3.1.6)$$

On peut facilement reformuler cette condition sous la forme

$$\frac{\det(S)^2}{H_1^2 H_2^2 H_3^2} = f_1 f_2 f_3. \quad (3.1.7)$$

**Remarque 3.1.19.** *On note que les fonctions  $f_i$ ,  $i \in \{1, 2, 3\}$ , sont définies à des constantes multiplicatives de produit égal à 1 près. Dans la suite nous choisirons donc, sans perte de généralité, ces constantes égales à 1.*

### 3.1.3 Structure asymptotiquement hyperbolique et exemples

Le but de cette Section est de définir la structure asymptotiquement hyperbolique que nous mettons sur les variétés de Stäckel définies précédemment et de donner trois exemples qui illustrent la diversité des variétés que nous considérons.

On dit qu'une variété riemannienne  $(\mathcal{M}, g)$  à bord  $\partial\mathcal{M}$  est asymptotiquement hyperbolique si sa courbure sectionnelle tend vers  $-1$  au bord. Dans ce travail, on ajoute une structure asymptotiquement hyperbolique aux deux bouts radiaux de notre cylindre de Stäckel dans le sens donné par Isozaki et Kurylev dans [IK14] (Section 3.2)<sup>1</sup>. On donne maintenant la définition de cette structure pour notre cadre.

**Définition 3.1.9** (Variétés de Stäckel asymptotiquement hyperboliques). *Une variété de Stäckel ayant la topologie d'un cylindre torique avec deux bouts asymptotiquement hyperboliques est une variété de Stäckel  $(\mathcal{M}, g)$  dont la matrice de Stäckel  $S$  satisfait la condition (C), munie d'une carte globale*

$$\mathcal{M} = (0, A)_{x^1} \times \mathcal{T}_{x^2, x^3}^2,$$

où  $x^1 \in (0, A)_{x^1}$  est une fonction distance au bord pour les deux bouts asymptotiquement hyperboliques  $\{x^1 = 0\}$  et  $\{x^1 = A\}$  et  $(x^2, x^3) \in [0, B]_{x^2} \times [0, C]_{x^3}$  sont les variables angulaires vivant dans le 2-tore  $\mathcal{T}_{x^2, x^3}^2$ , et satisfaisant les conditions suivantes.

1. La métrique de Stäckel  $g$  est de la forme (3.1.4).
2. Les fonctions  $s_{ij}$ ,  $(i, j) \in \{1, 2, 3\}^2$ , de la matrice de Stäckel sont lisses.
3. Les coefficients de la matrice de Stäckel satisfont :

(a)  $H_i^2 > 0$  pour  $i \in \{1, 2, 3\}$  (Métrique riemannienne).

---

<sup>1</sup>On note que la structure asymptotiquement hyperbolique introduite dans [IK14] est légèrement plus générale que celle utilisée par Melrose, Guillarmou, Joshi et Sá Barreto dans [GSB09, JSB00, Mel04, SB05].

(b)  $s_{2j}(0) = s_{2j}(B)$ ,  $s'_{2j}(0) = s'_{2j}(B)$ ,  $s_{3j}(0) = s_{3j}(C)$  et  $s'_{3j}(0) = s'_{3j}(C)$  pour  $j \in \{1, 2, 3\}$  (Conditions périodiques en les variables angulaires).

(c) Structure asymptotiquement hyperbolique aux bouts  $\{x^1 = 0\}$  et  $\{x^1 = A\}$  :

i. En  $\{x^1 = 0\}$  : il existe  $\epsilon_0 > 0$  et  $\delta > 0$  tels que  $\forall n \in \mathbb{N}$  il existe  $C_n > 0$  tel que :  $\forall x^1 \in (0, A - \delta)$ ,

$$\|(x^1 \partial_{x^1})^n ((x^1)^2 s_{11}(x^1) - 1)\| \leq C_n [1]_{x^1=0},$$

$$\|(x^1 \partial_{x^1})^n (s_{12}(x^1) - 1)\| \leq C_n [1]_{x^1=0},$$

$$\|(x^1 \partial_{x^1})^n (s_{13}(x^1) - 1)\| \leq C_n [1]_{x^1=0},$$

où

$$[1]_{x^1=0} = (1 + |\log(x^1)|)^{-\min(n,1)-1-\epsilon_0}.$$

ii. En  $\{x^1 = A\}$  : il existe  $\epsilon_1 > 0$  et  $\delta > 0$  tels que  $\forall n \in \mathbb{N}$  il existe  $C_n > 0$  tel que :  $\forall x^1 \in (\delta, A)$ ,

$$\|((A - x^1) \partial_{x^1})^n ((A - x^1)^2 s_{11}(x^1) - 1)\| \leq C_n [1]_{x^1=A},$$

$$\|((A - x^1) \partial_{x^1})^n (s_{12}(x^1) - 1)\| \leq C_n [1]_{x^1=A},$$

$$\|((A - x^1) \partial_{x^1})^n (s_{13}(x^1) - 1)\| \leq C_n [1]_{x^1=A},$$

où

$$[1]_{x^1=A} = (1 + |\log((A - x^1))|)^{-\min(n,1)-1-\epsilon_1}.$$

**Remarque 3.1.20.** On sait que, grâce à la condition (C),  $s_{12}$  et  $s_{13}$  tendent vers 1 quand  $x^1$  tend vers 0. Cependant, au bout  $\{x^1 = A\}$ , on peut seulement dire qu'il existe deux constantes positives  $\alpha$  et  $\beta$  telles que  $s_{12}$  et  $s_{13}$  tendent respectivement vers  $\alpha$  et  $\beta$ . Ainsi, au bout  $\{x^1 = A\}$ , on devrait supposer que

$$(A - x^1)^2 s_{11}(x^1) = [1]_{\epsilon_1}, \quad s_{12}(x^1) = \alpha [1]_{\epsilon_1} \quad \text{et} \quad s_{13}(x^1) = \beta [1]_{\epsilon_1},$$

où,

$$[1]_{\epsilon_1} = 1 + O((1 + |\log(A - x^1)|)^{-1-\epsilon_1}).$$

Cependant, on peut montrer que (voir le dernier point de la Remarque 3.1.22), si  $s_{22}$  ou  $s_{33}$  n'est pas une fonction constante, alors  $\alpha = \beta = 1$ .

On se propose de donner une explication du sens de la structure asymptotiquement

hyperbolique pour les variétés de Stäckel que l'on considère ici<sup>2</sup>. Puisque l'étude du bout  $\{x^1 = A\}$  est similaire on se contente d'étudier le bout  $\{x^1 = 0\}$ . On commence par écrire la métrique (3.1.4) dans un voisinage du bout  $\{x^1 = 0\}$  sous la forme

$$g = \sum_{i=1}^3 H_i^2 (dx^i)^2 = \frac{\sum_{i=1}^3 (x^1)^2 H_i^2 (dx^i)^2}{(x^1)^2}.$$

Par définition,

$$\begin{cases} (x^1)^2 H_1^2 = (x^1)^2 s_{11} + (x^1)^2 \left( s_{12} \frac{s^{12}}{s^{11}} + s_{13} \frac{s^{13}}{s^{21}} \right) \\ (x^1)^2 H_2^2 = (x^1)^2 s_{11} \frac{s^{11}}{s_{32}s_{13} - s_{33}s_{12}} + (x^1)^2 \left( s_{12} \frac{s^{12}}{s_{32}s_{13} - s_{33}s_{12}} + s_{13} \frac{s^{13}}{s_{32}s_{13} - s_{33}s_{12}} \right) \\ (x^1)^2 H_3^2 = (x^1)^2 s_{11} \frac{s^{11}}{s_{23}s_{12} - s_{22}s_{13}} + (x^1)^2 \left( \frac{s^{12}}{s_{23}s_{12} - s_{22}s_{13}} + \frac{s_{13}}{s_{12}} \frac{s^{13}}{s_{23}s_{12} - s_{22}s_{13}} \right) \end{cases} \quad (3.1.8)$$

Comme ceci est montré dans [MM87], on sait qu'au bout  $\{x^1 = 0\}$ , la courbure sectionnelle de  $g$  tend vers  $-|dx^1|_h$  où

$$h = \sum_{i=1}^3 (x^1)^2 H_i^2 (dx^i)^2.$$

En d'autres termes, l'opposé de la courbure sectionnelle au bout  $\{x^1 = 0\}$  est équivalente à

$$(x^1)^2 H_1^2 = (x^1)^2 s_{11} + (x^1)^2 \left( s_{12} \frac{s^{12}}{s^{11}} + s_{13} \frac{s^{13}}{s^{21}} \right).$$

Ainsi, puisque la structure asymptotiquement hyperbolique correspond à une courbure sectionnelle tendant vers  $-1$ , on veut que cette quantité tende vers 1. Ceci est assuré par la troisième hypothèse de la Définition 3.1.9 qui entraîne que (pour  $n = 0$ ) :

$$(x^1)^2 s_{11}(x^1) = [1]_{\epsilon_0}, \quad s_{12}(x^1) = [1]_{\epsilon_0} \quad \text{et} \quad s_{13}(x^1) = [1]_{\epsilon_0}, \quad (3.1.9)$$

où

$$[1]_{\epsilon_0} = 1 + O((1 + |\log(x^1)|)^{-1-\epsilon_0}).$$

On remarque également que, sous ces conditions on peut écrire, grâce à (3.1.8), la métrique  $g$  dans un voisinage de  $\{x^1 = 0\}$ , sous la forme

$$g = \frac{(dx^1)^2 + d\Omega_{\mathcal{T}^2}^2 + P(x^1, x^2, x^3, dx^1, dx^2, dx^3)}{(x^1)^2}, \quad (3.1.10)$$

---

<sup>2</sup>On renvoie à [IK14], Section 3 p.99-101, pour une justification de l'appellation "asymptotiquement hyperbolique".

où

$$d\Omega_{\mathcal{T}^2}^2 = \frac{s^{11}}{s_{32} - s_{33}}(dx^2)^2 + \frac{s^{11}}{s_{23} - s_{22}}(dx^3)^2,$$

est une métrique riemannienne sur le 2-tore  $\mathcal{T}^2$  (puisque  $s^{11}$ ,  $s^{21}$  et  $s^{31}$  ont le même signe) et  $P$  est un terme de reste qui est, moralement, petit lorsque  $x^1 \rightarrow 0$ . Ainsi, à la limite  $x^1 \rightarrow 0$ , on voit que

$$g \sim \frac{(dx^1)^2 + d\Omega_{\mathcal{T}^2}^2}{(x^1)^2},$$

c'est-à-dire que  $g$  est une petite perturbation d'une métrique de type hyperbolique.

**Remarque 3.1.21.** 1. D'après la Définition précédente, on a également besoin des conditions sur les dérivées des fonctions  $s_{1j}$ ,  $j \in \{1, 2, 3\}$ , pour être dans le cadre de [IK14].

2. Par symétrie, on peut faire la même analyse au bout  $\{x^1 = A\}$ .

À partir des conditions (3.1.9) et de la condition de Robertson (3.1.6) on peut obtenir plus d'informations sur les fonctions  $f_1$ ,  $f_2$  et  $f_3$ . On commence par remarquer que

$$\begin{aligned} f_1 f_2 f_3 &= \frac{s^{11} s^{21} s^{31}}{\det(S)} \\ &= \frac{s^{11}(s_{13}s_{32} - s_{12}s_{33})(s_{12}s_{23} - s_{13}s_{22})}{s_{11}s^{11} + s_{12}s^{12} + s_{13}s^{13}}. \end{aligned}$$

Ainsi, en utilisant les conditions (3.1.9), on obtient que

$$f_1 f_2 f_3 \sim (x^1)^2 (s_{23} - s_{22})(s_{32} - s_{33}), \quad \text{quand } x^1 \rightarrow 0.$$

Par conséquent, on peut affirmer qu'il existe trois constantes positives  $c_1$ ,  $c_2$  et  $c_3$  telles que  $c_1 c_2 c_3 = 1$  et

$$f_1(x^1) = c_1 (x^1)^2 [1]_{\epsilon_0}, \quad f_2(x^2) = c_2 (s_{23} - s_{22}) \quad \text{et} \quad f_3(x^3) = c_3 (s_{32} - s_{33}). \quad (3.1.11)$$

On note que les fonctions  $f_i$ ,  $i \in \{1, 2, 3\}$ , sont définies à des constantes multiplicatives  $c_1$ ,  $c_2$  et  $c_3$  telles que  $c_1 c_2 c_3 = 1$  près. Cependant, comme nous l'avons mentionné précédemment, on peut choisir ces constantes égales à 1. Bien sûr, le résultat correspondant sur  $f_1$  au bout  $\{x^1 = A\}$  est également vrai.

**Remarque 3.1.22.** L'analyse précédente nous permet de simplifier la condition de Robertson et ainsi l'expression de la métrique riemannienne sur le 2-tore.

### 3.1. Introduction et présentation du résultat

---

1. On commence par noter que, si l'on procède à un changement de variable de Liouville en la  $i$ -ème variable,

$$X^i = \int_0^{x^i} \sqrt{g_i(s)} ds, \quad (3.1.12)$$

où  $g_i$  est une fonction positive de la variable  $x^i$ , le coefficient de la métrique correspondant  $H_i^2$  est divisé par  $g_i(x^i)$ . La même modification de la métrique a lieu lorsque l'on divise la  $i$ -ème ligne de la matrice de Stäckel par la fonction  $g_i$ . Ainsi, procéder à un changement de variable de Liouville est équivalent à diviser la  $i$ -ème ligne de la matrice de Stäckel par la fonction correspondante.

2. On note à présent que, si l'on divise la  $i$ -ème ligne de la matrice de Stäckel par une fonction  $g_i$  de la variable  $x^i$ , la quantité

$$\frac{s^{11}s^{21}s^{31}}{\det(S)}$$

est divisée par  $g_i$ . Ainsi, dans la condition de Robertson (3.1.6), on peut toujours supposer que  $f_2 = f_3 = 1$  en choisissant un système de coordonnées approprié sur  $\mathcal{T}^2$ . Cependant, on ne divise pas la première ligne par  $f_1$  car cela change la description de la structure hyperbolique (i.e. la condition (3.1.9)). Néanmoins, il reste un degré de liberté sur la première ligne. On peut par exemple diviser la première ligne par  $s_{12}$  ou  $s_{13}$  et on obtient alors que la partie radiale dépend uniquement des deux fonctions scalaires  $\frac{s_{11}}{s_{13}}$  et  $\frac{s_{12}}{s_{13}}$ . Comme nous allons le voir à la fin de la Section 3.4, ces quotients sont en réalité exactement les fonctions scalaires que l'on retrouve lors de notre étude de la partie radiale. Cependant, puisque cela ne simplifie pas notre travail nous n'utilisons pas cette réduction.

3. À partir de maintenant,  $f_2 = 1$  et  $f_3 = 1$  et on peut ainsi réécrire (3.1.11) sous la forme

$$s_{23} - s_{22} = 1 \quad \text{et} \quad s_{32} - s_{33} = 1.$$

Grâce à ces égalités, on peut également écrire

$$d\Omega_{\mathcal{T}^2}^2 = s^{11}((dx^2)^2 + (dx^3)^2),$$

pour la métrique induite sur le bord compactifié  $\{x^1 = 0\}$ .

4. En toute généralité, nous savons que  $s_{12}$  et  $s_{13}$  tendent vers 1 lorsque  $x^1$  tend vers



0 mais on ne sait pas que ces limites sont encore valables lorsque  $x^1$  tend vers  $A$ . Cependant, la structure de Stäckel nous permet de montrer que la structure asymptotiquement hyperbolique doit être la même aux deux bouts (sous une légère hypothèse supplémentaire). En effet, supposons que le comportement de la première ligne aux deux bouts soit le suivant : au bout  $\{x^1 = 0\}$

$$(x^1)^2 s_{11}(x^1) = [1]_{\epsilon_0}, \quad s_{12}(x^1) = [1]_{\epsilon_0} \quad \text{et} \quad s_{13}(x^1) = [1]_{\epsilon_0},$$

et au bout  $\{x^1 = A\}$

$$(A - x^1)^2 s_{11}(x^1) = [1]_{\epsilon_1}, \quad s_{12}(x^1) = \alpha [1]_{\epsilon_1} \quad \text{et} \quad s_{13}(x^1) = \beta [1]_{\epsilon_1},$$

où,

$$[1]_{\epsilon_0} = 1 + O((1 + |\log(x^1)|)^{-1-\epsilon_0}) \quad \text{et} \quad [1]_{\epsilon_1} = 1 + O((1 + |\log(A - x^1)|)^{-1-\epsilon_1})$$

et  $\alpha$  et  $\beta$  sont des constantes strictement positives. En utilisant la condition de Robertson au bout  $\{x^1 = 0\}$  et au bout  $\{x^1 = A\}$  on obtient

$$1 = f_2 = s_{23} - s_{22} = \alpha s_{23} - \beta s_{22},$$

et

$$1 = f_3 = s_{32} - s_{33} = \beta s_{32} - \alpha s_{33}.$$

Ainsi, en utilisant le fait que  $s_{23} = 1 + s_{22}$  et  $s_{32} = 1 + s_{33}$ , on obtient que

$$(\alpha - \beta)s_{22} = 1 - \alpha \quad \text{et} \quad (\beta - \alpha)s_{33} = 1 - \beta.$$

Par conséquent, si l'on suppose que  $s_{22}$  ou  $s_{33}$  ne sont pas des fonctions constantes, on obtient que  $\alpha = \beta = 1$ .

On achève cette Section par trois exemples de variétés de Stäckel.

**Exemple 3.1.2.** On donne ici trois exemples de variétés de Stäckel illustrant la diversité des variétés que nous considérons.

1. On commence par choisir la matrice de Stäckel

$$S = \begin{pmatrix} s_{11}(x^1) & s_{12}(x^1) & s_{13}(x^1) \\ a & b & c \\ d & e & f \end{pmatrix},$$

### 3.1. Introduction et présentation du résultat

---

où  $s_{11}$ ,  $s_{12}$  et  $s_{13}$  sont des fonctions lisses de la variable  $x^1$  et  $a$ ,  $b$ ,  $c$ ,  $d$ ,  $e$  et  $f$  sont des constantes réelles. La métrique  $g$  est alors donnée par

$$g = \sum_{i=1}^3 H_i^2 (dx^i)^2,$$

où les  $H_i^2$ , pour  $i \in \{1, 2, 3\}$ , sont des fonctions seulement de la variable  $x^1$ . Elle satisfait alors de façon triviale la condition de Robertson et on peut ajouter la structure asymptotiquement hyperbolique donnée dans la Définition 3.1.9. On note que, comme cela a été expliqué dans la Remarque précédente,  $g$  dépend uniquement de deux fonctions arbitraires (après un changement de variable en la variable  $x^1$ ). De plus, on peut montrer que  $\partial_{x^2}$  et  $\partial_{x^3}$  sont des champs de vecteurs de Killing. L'existence de ces champs de Killing traduit la présence de symétries par rapport aux translations en les variables  $x^2$  et  $x^3$ .

2. On peut également choisir la matrice de Stäckel

$$S = \begin{pmatrix} s_{11}(x^1) & s_{12}(x^1) & as_{12}(x^1) \\ 0 & s_{22}(x^2) & s_{23}(x^2) \\ 0 & s_{32}(x^3) & s_{33}(x^3) \end{pmatrix},$$

où  $s_{11}$  et  $s_{12}$  sont des fonctions lisses de la variable  $x^1$ ,  $s_{22}$  et  $s_{23}$  sont des fonctions lisses de la variable  $x^2$ ,  $s_{32}$  et  $s_{33}$  sont des fonctions lisses de la variable  $x^3$  et  $a$  est une constante réelle. On peut alors munir la variété d'une structure asymptotiquement hyperbolique dans le sens donné dans la Définition 3.1.9 et la métrique  $g$  peut être écrite sous la forme

$$g = s_{11}(dx^1)^2 + \frac{s_{11}}{s_{12}} \left( \frac{s^{11}}{as_{32} - s_{33}} (dx^2)^2 + \frac{s^{11}}{s_{23} - as_{22}} (dx^3)^2 \right).$$

Elle satisfait alors la condition de Robertson. On note que, après avoir procédé à des changements de variables de Liouville en les trois variables, la métrique  $g$  dépend de trois fonctions arbitraires. De plus, grâce à la transformation de Liouville

$$X^1 = \int_0^{x^1} \sqrt{s_{11}(s)} ds,$$

on voit qu'il existe un système de coordonnées pour lequel la métrique  $g$  est de la

forme

$$g = (dx^1)^2 + f(x^1)g_0,$$

où  $g_0$  est une métrique sur le 2-tore  $\mathcal{T}^2$ . En d'autres termes  $g$  est un produit tordu. En particulier,  $g$  est conforme à une métrique qui peut être écrite comme la somme directe d'une direction euclidienne et d'une métrique sur une variété compacte. On rappelle que dans ce cas, sous certaines hypothèses supplémentaires sur la partie compacte, l'unicité pour le problème de Calderón anisotrope sur une variété compacte à bord a été démontrée dans [DSFKSU09, DSFKLS13].

3. Enfin, on peut choisir la matrice de Stäckel

$$S = \begin{pmatrix} s_1(x^1)^2 & -s_1(x^1) & 1 \\ -s_2(x^2)^2 & s_2(x^2) & -1 \\ s_3(x^3)^2 & -s_3(x^3) & 1 \end{pmatrix},$$

où  $s_1$  est une fonction lisse en la variable  $x^1$ ,  $s_2$  est une fonction lisse en la variable  $x^2$  et  $s_3$  est une fonction lisse en la variable  $x^3$ . Ce modèle été étudié dans [Ben15, BM15] et est d'un grand intérêt dans l'étude des variétés riemanniennes géodésiquement équivalentes, i.e. des variétés qui partagent les mêmes géodésiques (voir [BM15]). La métrique associée

$$g = (s_1 - s_2)(s_1 - s_3)(dx^1)^2 + (s_2 - s_3)(s_1 - s_2)(dx^2)^2 + (s_3 - s_2)(s_3 - s_1)(dx^3)^2,$$

satisfait la condition de Robertson et n'a, a priori, pas de symétrie, n'est pas un produit tordu et dépend de trois fonctions arbitraires satisfaisant  $s_1 > s_2 > s_3$ . Pour munir cette variété d'une structure asymptotiquement hyperbolique dans le sens de la Définition 3.1.9 on commence par multiplier les deuxième et troisième colonnes de la matrice de Stäckel par la droite par la matrice inversible

$$G = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix},$$

puisque cette opération ne change pas la métrique. On obtient ainsi la nouvelle matrice de Stäckel

$$\begin{pmatrix} s_1(x^1)^2 & s_1(x^1) & s_1(x^1) - 1 \\ -s_2(x^2)^2 & -s_2(x^2) & -s_2(x^1) + 1 \\ s_3(x^3)^2 & s_3(x^3) & s_3(x^1) - 1 \end{pmatrix}.$$

### 3.1. Introduction et présentation du résultat

---

Dans un second temps, on utilise un changement de variable de Liouville en la première variable

$$X^1 = \int_0^{x^1} \sqrt{s_1(s)} ds,$$

et on obtient la matrice de Stäckel

$$S = \begin{pmatrix} s_1(X^1) & 1 & 1 - \frac{1}{s_1(X^1)} \\ -s_2(x^2)^2 & -s_2(x^2) & -s_2(x^1) + 1 \\ s_3(x^3)^2 & s_3(x^3) & s_3(x^1) - 1 \end{pmatrix}.$$

Finalement, on ajoute la structure asymptotiquement hyperbolique sur la première ligne en supposant que

$$s_1(X^1) = \frac{1}{(X^1)^2} (1 + O((1 + |\log(X^1)|)^{-1-\epsilon_0})), \quad \text{quand } X^1 \rightarrow 0$$

et

$$s_1(X^1) = \frac{1}{(A^1 - X^1)^2} (1 + O((1 + |\log(A^1 - X^1)|)^{-1-\epsilon_1})), \quad \text{quand } X^1 \rightarrow A^1,$$

où  $A^1 = \int_0^A \sqrt{s_1(s)} ds$ .

#### 3.1.4 Opérateur de diffusion et présentation du résultat

On rappelle ici la construction de l'opérateur de diffusion donnée dans [IK14, IKL14] pour des variétés asymptotiquement hyperboliques. Cette construction a déjà été utilisée dans [DKN14] dans le cas de surfaces de Liouville asymptotiquement hyperboliques. Moralement, dans un voisinage d'un bout asymptotiquement hyperbolique on peut comparer la dynamique globale avec une dynamique de comparaison plus simple, i.e. que l'on peut établir l'existence et la complétude asymptotique des opérateurs d'ondes

$$W_k^\pm = s - \lim e^{itH} J_k e^{-itH_0^k},$$

où  $J_k$  est une fonction de troncature qui isole le  $k$ -ème bout asymptotiquement hyperbolique et  $H_0^k$  est un hamiltonien plus simple qui gouverne la dynamique libre des ondes dans ce bout. L'opérateur de diffusion  $S_g$  est alors défini par

$$S_g = (W^+)^* W^-, \quad \text{où } W^\pm = \sum_k W_k^\pm.$$

Cet opérateur fait le lien entre les données asymptotiques (dites de diffusion) dans le passé et les données asymptotiques dans le futur. La matrice de diffusion  $S_g(\lambda)$  est alors la restriction de l'opérateur de diffusion  $S_g$  à un niveau d'énergie  $\lambda^2$ . Ceci correspond à l'approche dépendante du temps de la théorie de la diffusion. Il existe également une définition stationnaire équivalente. Pour définir la matrice de diffusion par une approche stationnaire, on applique la transformée de Fourier par rapport à  $t$  à l'équation des ondes  $\partial_t^2 u - \Delta_g u = 0$ , et au lieu d'étudier le comportement asymptotique de  $u(t, x)$  en temps grand, on étudie le comportement asymptotique en espace des solutions de l'équation de Helmholtz  $-\Delta_g u = \lambda^2 u$  lorsque  $|x| \rightarrow \infty$ . On obtient ainsi une définition équivalente de la matrice de diffusion à l'énergie  $\lambda^2$  (voir le Théorème 3.1.24).

Notre modèle particulier possède deux bouts et on introduit donc deux fonctions de troncature  $\chi_0$  et  $\chi_1$ , lisses sur  $\mathbb{R}$ , définies par

$$\chi_0 = 1 \quad \text{sur} \quad \left(0, \frac{A}{4}\right), \quad \chi_1 = 1 \quad \text{sur} \quad \left(\frac{3A}{4}, A\right), \quad \chi_0 + \chi_1 = 1 \quad \text{sur} \quad (0, A), \quad (3.1.13)$$

pour pouvoir séparer les deux bouts. On considère l'équation de Helmholtz décalée

$$-(\Delta_g + 1)f = \lambda^2 f,$$

où  $\lambda^2 \neq 0$  est une énergie fixée, qui est étudiée de façon usuelle sur les variétés asymptotiquement hyperboliques (voir [Bor07, IK14, IKL14, JSB00]). En effet, il est connu (voir [IKL14]) que le spectre essentiel de  $-\Delta_g$  est  $[1, +\infty)$  et on a ainsi décalé le bas du spectre essentiel en 0. Il est connu que l'opérateur  $-\Delta_g - 1$  n'a pas de valeurs propres plongées dans le spectre essentiel  $[0, +\infty)$  (voir [Bou13, IK14, IKL14]). De plus, il est montré dans [IKL14] que les solutions de l'équation stationnaire décalée

$$-(\Delta_g + 1)f = \lambda^2 f,$$

sont uniques lorsque l'on impose sur  $f$  des conditions de radiations à l'infini. Plus précisément, comme dans [DKN14], on définit des espaces de Besov qui encodent ces conditions de radiations à l'infini comme suit. Pour motiver nos définitions, on rappelle que les bords compactifiés  $\{x^1 = 0\}$  et  $\{x^1 = A\}$  sont munis de la métrique induite

$$d\Omega_{\mathcal{T}^2}^2 = s^{11}((dx^2)^2 + (dx^3)^2).$$

**Définition 3.1.10.** Soit  $\mathcal{H}_{\mathcal{T}^2} = L^2(\mathcal{T}^2, s^{11}dx^2dx^3)$ . On décompose les intervalles  $(0, +\infty)$

et  $(-\infty, A)$  sous la forme

$$(0, +\infty) = \cup_{k \in \mathbb{Z}} I_k \quad \text{et} \quad (-\infty, A) = \cup_{k \in \mathbb{Z}} J_k,$$

où

$$I_k = \begin{cases} (\exp(e^{k-1}), \exp(e^k)] & \text{si } k \geq 1 \\ (e^{-1}, e] & \text{si } k = 0 \\ (\exp(-e^{|k|}), \exp(-e^{|k|-1})) & \text{si } k \leq -1 \end{cases}$$

et

$$J_k = \begin{cases} (A - \exp(e^{k-1}), A - \exp(e^k)] & \text{si } k \geq 1 \\ (A - e^{-1}, A - e] & \text{si } k = 0 \\ (A - \exp(-e^{|k|}), A - \exp(-e^{|k|-1})) & \text{si } k \leq -1 \end{cases}.$$

On définit les espaces de Besov  $\mathcal{B}_0 = \mathcal{B}_0(\mathcal{H}_{\mathcal{T}^2})$  et  $\mathcal{B}_1 = \mathcal{B}_1(\mathcal{H}_{\mathcal{T}^2})$  comme étant les espaces de Banach des fonctions à valeurs dans  $\mathcal{H}_{\mathcal{T}^2}$  satisfaisant respectivement

$$\|f\|_{\mathcal{B}_0} = \sum_{k \in \mathbb{Z}} e^{\frac{|k|}{2}} \left( \int_{I_k} \|f(x)\|_{\mathcal{H}_{\mathcal{T}^2}}^2 \frac{dx}{x^2} \right)^{\frac{1}{2}} < \infty$$

et

$$\|f\|_{\mathcal{B}_1} = \sum_{k \in \mathbb{Z}} e^{\frac{|k|}{2}} \left( \int_{J_k} \|f(x)\|_{\mathcal{H}_{\mathcal{T}^2}}^2 \frac{dx}{(A-x)^2} \right)^{\frac{1}{2}} < \infty.$$

Les espaces duaux  $\mathcal{B}_0^*$  et  $\mathcal{B}_1^*$  sont alors identifiés avec les espaces équipés des normes

$$\|f\|_{\mathcal{B}_0^*} = \left( \sup_{R > e} \frac{1}{\log(R)} \int_{\frac{1}{R}}^R \|f(x)\|_{\mathcal{H}_{\mathcal{T}^2}}^2 \frac{dx}{x^2} \right)^{\frac{1}{2}} < \infty$$

et

$$\|f\|_{\mathcal{B}_1^*} = \left( \sup_{R > e} \frac{1}{\log(R)} \int_{A-R}^{A-\frac{1}{R}} \|f(x)\|_{\mathcal{H}_{\mathcal{T}^2}}^2 \frac{dx}{(A-x)^2} \right)^{\frac{1}{2}} < \infty.$$

**Remarque 3.1.23.** Comme ceci est montré dans [IK14], on peut comparer les espaces de Besov  $\mathcal{B}_0$  et  $\mathcal{B}_0^*$  à des espaces  $L^2$  à poids. En effet, si l'on définit  $L_0^{2,s}((0, +\infty), \mathcal{H}_{\mathcal{T}^2})$ , pour  $s \in \mathbb{R}$ , par

$$\|f\|_s = \left( \int_0^{+\infty} (1 + |\log(x)|)^{2s} \|f(x)\|_{\mathcal{H}_{\mathcal{T}^2}}^2 \frac{dx}{x^2} \right)^{\frac{1}{2}} < \infty,$$

alors pour  $s > \frac{1}{2}$ ,

$$L_0^{2,s} \subset \mathcal{B}_0 \subset L_0^{2,\frac{1}{2}} \subset L_0^2 \subset L_0^{2,-\frac{1}{2}} \subset \mathcal{B}_0^* \subset L_0^{2,-s}.$$

Il existe un résultat similaire pour les espaces de Besov  $\mathcal{B}_1$  et  $\mathcal{B}_1^*$ .

**Définition 3.1.11.** On définit les espaces de Besov  $\mathcal{B}$  et  $\mathcal{B}^*$  comme étant les espaces de Banach de fonctions à valeurs dans  $\mathcal{H}_{\mathcal{T}^2}$  sur  $(0, A)$  munis des normes

$$\|f\|_{\mathcal{B}} = \|\chi_0 f\|_{\mathcal{B}_0} + \|\chi_1 f\|_{\mathcal{B}_1}$$

et

$$\|f\|_{\mathcal{B}^*} = \|\chi_0 f\|_{\mathcal{B}_0^*} + \|\chi_1 f\|_{\mathcal{B}_1^*}.$$

On définit également l'espace de Hilbert des données de diffusion

$$\mathcal{H}_{\infty} = \mathcal{H}_{\mathcal{T}^2} \otimes \mathbb{C}^2 \simeq \mathcal{H}_{\mathcal{T}^2} \oplus \mathcal{H}_{\mathcal{T}^2}.$$

Dans [IK14] (voir Theorem 3.15) le résultat suivant est démontré.

**Théoreme 3.1.24.** On donne ici une construction stationnaire de la matrice de diffusion.

1. Pour toute solution  $f \in \mathcal{B}^*$  de l'équation de Helmholtz décalée à une énergie non-nulle  $\lambda^2$

$$-(\Delta_g + 1)f = \lambda^2 f, \tag{3.1.14}$$

il existe un unique  $\psi^{(\pm)} = (\psi_0^{(\pm)}, \psi_1^{(\pm)}) \in \mathcal{H}_{\infty}$  tel que

$$\begin{aligned} f \simeq & \omega_-(\lambda) \left( \chi_0 (x^1)^{\frac{1}{2}+i\lambda} \psi_0^{(-)} + \chi_1 (A - x^1)^{\frac{1}{2}+i\lambda} \psi_1^{(-)} \right) \\ & - \omega_+(\lambda) \left( \chi_0 (x^1)^{\frac{1}{2}-i\lambda} \psi_0^{(+)} + \chi_1 (A - x^1)^{\frac{1}{2}-i\lambda} \psi_1^{(+)} \right), \end{aligned} \tag{3.1.15}$$

où

$$\omega_{\pm}(\lambda) = \frac{\pi}{(2\lambda \sinh(\pi\lambda))^{\frac{1}{2}} \Gamma(1 \mp i\lambda)}. \tag{3.1.16}$$

2. Pour tout  $\psi^{(-)} \in \mathcal{H}_{\infty}$ , il existe un unique  $\psi^{(+)} \in \mathcal{H}_{\infty}$  et  $f \in \mathcal{B}^*$  satisfaisant (3.1.14) pour lesquels la décomposition (3.1.15) est valide. Ceci définit de façon unique la matrice de diffusion  $S_g(\lambda)$  comme étant l'opérateur à valeurs dans  $\mathcal{H}_{\infty}$  tel que pour tout  $\psi^{(-)} \in \mathcal{H}_{\infty}$ ,

$$\psi^{(+)} = S_g(\lambda) \psi^{(-)}. \tag{3.1.17}$$

3. La matrice de diffusion  $S_g(\lambda)$  est unitaire sur  $\mathcal{H}_\infty$ .

On note que dans notre cadre avec deux bouts asymptotiquement hyperboliques la matrice de diffusion à la structure d'une matrice  $2 \times 2$  dont les composantes sont des opérateurs à valeurs dans  $\mathcal{H}_{\mathcal{T}^2}$ . Plus précisément, on écrit

$$S_g(\lambda) = \begin{pmatrix} L(\lambda) & T_R(\lambda) \\ T_L(\lambda) & R(\lambda) \end{pmatrix},$$

où  $T_L(\lambda)$  et  $T_R(\lambda)$  sont des opérateurs de transmission alors que  $L(\lambda)$  et  $R(\lambda)$  sont des opérateurs de réflexion respectivement à droite et à gauche. Les opérateurs de transmission mesurent la partie du signal qui est transmise d'un bout à l'autre dans une expérience de diffusion alors que les opérateurs de réflexion mesurent la partie du signal qui est réfléchi d'un bout sur lui-même.

Le résultat principal de ce chapitre est le suivant :

**Théoreme 3.1.25.** *Soient  $(\mathcal{M}, g)$  et  $(\mathcal{M}, \tilde{g})$ , où  $\mathcal{M} = (0, A)_{x^1} \times \mathcal{T}_{x^2, x^3}^2$ , deux cylindre torique de Stäckel, i.e. munit des métriques  $g$  et  $\tilde{g}$  définies respectivement par (3.1.4). On suppose que ces variétés satisfont la condition de Robertson et sont munies de structures asymptotiquement hyperboliques aux deux bouts  $\{x^1 = 0\}$  et  $\{x^1 = A\}$  définies dans la Définition 3.1.9. On désigne par  $S_g(\lambda)$  et  $S_{\tilde{g}}(\lambda)$  les matrices de diffusion correspondantes à une énergie fixée  $\lambda \neq 0$  définies par le Théorème 3.1.24. On suppose que*

$$S_g(\lambda) = S_{\tilde{g}}(\lambda).$$

*Alors il existe un difféomorphisme  $\Psi : \mathcal{M} \rightarrow \mathcal{M}$ , égal à l'identité sur les bords compactifiés  $\{x^1 = 0\}$  et  $\{x^1 = A\}$ , tel que  $\tilde{g}$  soit le tiré en arrière de  $g$  par  $\Psi$ , i.e.*

$$\tilde{g} = \Psi^* g.$$

Pour des Variétés Asymptotiquement Hyperboliques (notées VAH) sans symétries particulières, des résultats de diffusion directe et inverse pour des ondes scalaires ont été prouvés par Joshi et Sá Barreto dans [JSB00], par Sá Barreto dans [SB05], par Guillarmou et Sá Barreto dans [GSB08, GSB09] et par Isozaki et Kurylev dans [IK14]. Dans [JSB00], il est montré que les asymptotiques de la métrique d'une VAH sont déterminées de façon unique (à isométrie près) par la matrice de diffusion  $S(\lambda)$  à une énergie fixée  $\lambda$  en dehors d'un sous-ensemble discret de  $\mathbb{R}$ . Dans [SB05], il est prouvé que la métrique d'une VAH est déterminée de façon unique (à isométrie près) par la matrice de diffusion  $S(\lambda)$  pour



tout  $\lambda \in \mathbb{R}$  en dehors d'un certain sous-espace. Des résultats similaires ont été obtenus récemment dans [IK14] pour une classe encore plus générale de VAH. Dans [GSB09] il est prouvé que pour des variétés de type Einstein connexes conformément compactes de dimension paire  $n + 1$  la matrice de diffusion à l'énergie  $n$  sur un sous-ensemble ouvert de son bord conforme détermine de façon unique la variété à isométrie près. On mentionne également le travail [Mar09] de Marazzi dans lequel l'auteur étudie le problème de diffusion inverse pour l'équation de Schrödinger stationnaire sur une variété conformément compacte ayant pour courbure sectionnelle  $-\alpha^2$  au bord avec un potentiel régulier ne s'annulant pas sur ce bord. L'auteur montre alors que la connaissance de la matrice de diffusion à deux énergies fixées  $\lambda_1$  et  $\lambda_2$ ,  $\lambda_1 \neq \lambda_2$ , dans un bon sous-ensemble de  $\mathbb{C}$ , détermine de façon unique  $\alpha$  ainsi que les séries de Taylor du potentiel et de la métrique au bord. Enfin, mentionnons également [BP11] dans lequel un problème inverse à partir des résonances est étudié dans une certaine sous-classe de VAH.

Ce travail doit également être mis en perspective avec le problème de Calderón anisotrope sur des variétés riemanniennes compactes à bord. On rappelle ici la définition de ce problème. Soit  $(\mathcal{M}, g)$  une variété riemannienne compacte ayant un bord lisse  $\partial\mathcal{M}$ . On désigne par  $-\Delta_g$  l'opérateur de Laplace-Beltrami sur  $(\mathcal{M}, g)$  et on rappelle que cet opérateur associé à des conditions de Dirichlet au bord est autoadjoint sur  $L^2(\mathcal{M}, dVol_g)$  et a un spectre purement ponctuel  $\{\lambda_i^2\}_{i \geq 1}$ . On est intéressé par les solutions  $u$  de

$$\begin{cases} -\Delta_g u = \lambda^2 u, & \text{sur } \mathcal{M}, \\ u = \psi, & \text{sur } \partial\mathcal{M}. \end{cases} \quad (3.1.18)$$

Il est connu (voir par exemple [Sal13]) que pour tout  $\psi \in H^{\frac{1}{2}}(\partial\mathcal{M})$  il existe une unique solution faible  $u \in H^1(\mathcal{M})$  de (3.1.18) lorsque  $\lambda^2$  n'appartient pas au spectre de Dirichlet  $\{\lambda_i^2\}_{i \geq 1}$  de  $-\Delta_g$ . Ceci nous permet de définir l'opérateur de Dirichlet-Neumann (DN) comme étant l'opérateur  $\Lambda_g(\lambda^2)$  de  $H^{\frac{1}{2}}(\partial\mathcal{M})$  sur  $H^{-\frac{1}{2}}(\partial\mathcal{M})$  défini pour tout  $\psi \in H^{\frac{1}{2}}(\partial\mathcal{M})$  par

$$\Lambda_g(\lambda^2)(\psi) = (\partial_\nu u)|_{\partial\mathcal{M}},$$

où  $u$  est l'unique solution de (3.1.18) et  $(\partial_\nu u)|_{\partial\mathcal{M}}$  désigne sa dérivée par rapport au vecteur normal unitaire sortant  $\nu$  sur  $\partial\mathcal{M}$ . Le problème de Calderón peut alors être énoncé de la façon suivante :

*Est-ce-que la connaissance de l'opérateur de DN,  $\Lambda_g(\lambda^2)$ , à une fréquence  $\lambda^2$  détermine de façon unique la métrique  $g$  ?*

On renvoie par exemple à [DSFKSU09, DSFKLS13, GSB08, GT11, KS13, LTU03, LU01,

[LU89] pour d'importantes contributions dans ce domaine et à [GT13, KS14, Sal13, Uhl09] pour un état de l'art sur cette question.

En dimension deux, le problème de Calderón anisotrope avec  $\lambda^2 = 0$  a été résolu pour des surfaces riemanniennes connexes dans [LU01, LU89]. Une réponse positive a été apportée pour la fréquence  $\lambda^2 = 0$  en dimension trois ou plus pour des variétés riemanniennes compactes connexes avec une métrique analytique réelle d'abord dans [LU89] sous certaines hypothèses topologiques relaxées plus tard dans [LTU03, LU01]. Une réponse positive a également été fournie pour des variétés de type Einstein compactes et connexes à bord dans [GSB08]. Pour le reste, le problème de Calderón anisotrope en dimension au moins trois reste un problème largement ouvert. Des résultats ont été obtenus dans [DSFKSU09, DSFKLS13] pour certaines classes de variétés riemanniennes compactes à bord qui sont conformément transversalement anisotrope, i.e. pour des variétés riemanniennes telles que

$$\mathcal{M} \subset \mathbb{R} \times \mathcal{M}_0, \quad g = c(e \oplus g_0),$$

où  $(\mathcal{M}_0, g_0)$  est une variété riemannienne compacte lisse à bord de dimension  $n - 1$ ,  $e$  est la métrique euclidienne sur la droite réelle et  $c$  est une fonction positive sur le cylindre  $\mathbb{R} \times \mathcal{M}_0$ . Sous certaines hypothèses sur la variété transverse  $(\mathcal{M}_0, g_0)$  (simplicité), la variété riemannienne  $(\mathcal{M}, g)$  est dite admissible. Dans ce cadre, les auteurs de [DSFKSU09, DSFKLS13] arrivent à déterminer de façon unique le facteur conforme  $c$  à partir de la connaissance de l'opérateur de DN à la fréquence  $\lambda^2 = 0$ . L'un des buts de ce chapitre est ainsi de donner un exemple de variétés sur lesquelles on arrive à résoudre le problème de diffusion inverse à énergie fixée mais qui ne possèdent pas l'une des structures particulières que l'on vient de décrire et pour lesquelles la question de l'unicité pour le problème de Calderón anisotrope sur des variétés riemanniennes compactes à bord est résolue (voir Exemple 3.1.2, 3)).

#### 3.1.5 Aperçu de la preuve

La preuve du Théorème 3.1.25 se divise en quatre étapes que nous allons décrire ici.

Étape 1 : La première étape de la preuve consiste à étudier le problème de diffusion directe. C'est ce que nous ferons dans la Section 3.2. Dans cette Section nous commencerons par utiliser la structure de variété de Stäckel satisfaisant la condition de Robertson pour procéder à la séparation des variables de l'équation de Helmholtz. On obtient ainsi que

l'équation de Helmholtz décalée

$$-(\Delta_g + 1)f = \lambda^2 f,$$

peut être réécrite sous la forme

$$A_1 f + s_{12} L f + s_{13} H f = 0,$$

où  $A_1$  est un opérateur différentiel seulement en la variable  $x^1$  et  $L$  et  $H$  sont des opérateurs autoadjoints, elliptiques et semi-bornés qui commutent sur  $L^2(\mathcal{T}^2, s^{11} dx^2 dx^3)$  dépendant uniquement des variables  $x^2$  et  $x^3$ . Puisque les opérateurs  $L$  et  $H$  commutent il existe une base hilbertienne commune de fonctions propres pour  $L$  et  $H$ . De plus, l'ellipticité de ces opérateurs sur une variété compacte nous assure que le spectre est discret et le caractère autoadjoint montre que le spectre est réel. On considère alors des harmoniques généralisées  $\{Y_m\}_{m \geq 1}$  formant une base hilbertienne de  $L^2(\mathcal{T}^2, s^{11} dx^2 dx^3)$  associée au spectre joint  $(\mu_m^2, \nu_m^2)$  de  $(H, L)$ . On décompose les solutions

$$f(x^1, x^2, x^3) = \sum_{m \geq 1} u_m(x^1) Y_m(x^2, x^3)$$

de l'équation de Helmholtz sur la base commune d'harmoniques  $\{Y_m\}_{m \geq 1}$  et on obtient alors que l'équation de Helmholtz se sépare en un système de trois équations différentielles ordinaires :

$$\begin{cases} -u_m'' + \frac{1}{2}(\log(f_1))' u_m' + [-(\lambda^2 + 1)s_{11} + \mu_m^2 s_{12} + \nu_m^2 s_{13}] u_m = 0 \\ -v_m'' + [-(\lambda^2 + 1)s_{21} + \mu_m^2 s_{22} + \nu_m^2 s_{23}] v_m = 0 \\ -w_m'' + [-(\lambda^2 + 1)s_{31} + \mu_m^2 s_{32} + \nu_m^2 s_{33}] w_m = 0 \end{cases},$$

où  $f_1$  est la fonction apparaissant dans la condition de Robertson et  $Y_m(x^2, x^3) = v_m(x^2) w_m(x^3)$ . Dans ce système d'EDOs il y a une EDO radiale en la variable  $x^1$  et deux EDOs angulaires en les variables  $x^2$  et  $x^3$ . On insiste sur le fait que les deux moments angulaires  $\mu_m^2$  et  $\nu_m^2$  qui sont les constantes de séparation correspondent également au spectre couplé des deux opérateurs angulaires  $H$  et  $L$ . Le fait que les moments angulaires  $(\mu_m^2, \nu_m^2)$  soient couplés a des conséquences importantes dans l'utilisation de la méthode de Complexification du Moment Angulaire. En effet, on ne peut pas travailler séparément avec un seul moment angulaire ce qui nous oblige à utiliser une version multivariable de cette méthode.

Dans un second temps, on définit la fonction caractéristique et la fonction de Weyl-Titchmarsh en suivant la construction donnée dans [DKN14, FY05, KST12]. On rappelle brièvement ici la définition de ces objets et la raison pour laquelle on les utilise. En utilisant un changement de variable de Liouville  $X^1 = g(x^1)$ ,  $X^1 \in (0, A^1)$  où  $A^1 = \int_0^A g(x^1) dx^1$ , on peut écrire l'équation radiale sous la forme

$$-\ddot{U} + q_{\nu_m^2} U = -\mu_m^2 U, \quad (3.1.19)$$

où  $-\mu_m^2$  est maintenant le paramètre spectral et  $q_{\nu_m^2}$  satisfait au bout  $\{X^1 = 0\}$ ,

$$q_{\nu_m^2}(X^1, \lambda) = -\frac{\lambda^2 + \frac{1}{4}}{(X^1)^2} + q_{0, \nu_m^2}(X^1, \lambda),$$

où  $X^1 q_{0, \nu_m^2}(X^1, \lambda)$  est intégrable au bout  $\{X^1 = 0\}$  (le potentiel  $q_{\nu_m^2}$  possède également les mêmes propriétés à l'autre bout). On est ainsi dans le cadre de [FY05]. On peut donc définir la fonction caractéristique et la fonction de Weyl-Titchmarsh associées à cette équation de Schrödinger non-autoadjointe singulière. Pour ce faire, on suit la méthode donnée dans [DKN14]. On définit ainsi deux systèmes fondamentaux de solutions  $\{S_{10}, S_{20}\}$  et  $\{S_{11}, S_{21}\}$  définis par :

1. Lorsque  $X^1 \rightarrow 0$ ,

$$S_{10}(X^1, \mu^2, \nu^2) \sim (X^1)^{\frac{1}{2}-i\lambda} \quad \text{et} \quad S_{20}(X^1, \mu^2, \nu^2) \sim \frac{1}{2i\lambda} (X^1)^{\frac{1}{2}+i\lambda}$$

et lorsque  $X^1 \rightarrow A^1$ ,

$$S_{11}(X^1, \mu^2, \nu^2) \sim (A^1 - X^1)^{\frac{1}{2}-i\lambda} \quad \text{et} \quad S_{21}(X^1, \mu^2, \nu^2) \sim -\frac{1}{2i\lambda} (A^1 - X^1)^{\frac{1}{2}+i\lambda}.$$

2.  $W(S_{1n}, S_{2n}) = 1$  pour  $n \in \{0, 1\}$ .
3. Pour tout  $X^1 \in (0, A^1)$ ,  $\mu \mapsto S_{jn}(X^1, \mu^2, \nu^2)$  est une fonction entière pour  $j \in \{1, 2\}$  et  $n \in \{0, 1\}$ .

On ajoute alors des conditions de bord singulières aux deux bouts (voir (3.2.24)) et on considère la nouvelle équation radiale comme un problème aux valeurs propres. Enfin, on définit les deux fonctions caractéristiques de cette équation radiale comme des Wronskiens de fonctions des systèmes fondamentaux de solutions :

$$\Delta_{q_{\nu_m^2}}(\mu_m^2) = W(S_{11}, S_{10})$$

et

$$\delta_{q_{\nu_m^2}}(\mu_m^2) = W(S_{11}, S_{20})$$

et on définit également la fonction de Weyl-Titchmarsh par :

$$M_{q_{\nu_m^2}}(\mu_m^2) = -\frac{\delta_{q_{\nu_m^2}}(\mu_m^2)}{\Delta_{q_{\nu_m^2}}(\mu_m^2)}. \quad (3.1.20)$$

La définition précédente généralise la définition usuelle des fonctions de Weyl-Titchmarsh classiques pour des opérateurs différentiels de Sturm-Liouville réguliers. On renvoie à [KST12] pour la théorie des opérateurs de Sturm-Liouville autoadjoints singuliers ainsi que la définition et les principales propriétés des fonctions de Weyl-Titchmarsh. Dans notre cas les conditions de bord rendent l'équation de Sturm-Liouville non-autoadjointe. La fonction de Weyl-Titchmarsh généralisée peut malgré tout être définie en utilisant la même recette comme cela a été montré dans [DKN14, FY05] et rappelé ci-dessus. Notre intérêt dans le fait de considérer la fonction de Weyl-Titchmarsh généralisée  $M_{q_{\nu_m^2}}(\mu_m^2)$  vient du fait qu'il s'agit d'un outil puissant pour obtenir des résultats d'unicité dans le cadre des problèmes inverses unidimensionnels. En effet, le Théorème de Borg-Marchenko énonce (voir [KST12]) que si  $M_q$  et  $M_{\tilde{q}}$  sont deux fonctions de Weyl-Titchmarsh généralisées respectivement associées aux équations

$$-u'' + q(x)u = -\mu^2 u \quad \text{et} \quad -u'' + \tilde{q}(x)u = -\mu^2 u,$$

où  $q$  et  $\tilde{q}$  ont les singularités quadratiques décrites précédemment aux deux bouts, alors si

$$M_q(\mu^2) = M_{\tilde{q}}(\mu^2), \quad \mu \in \mathbb{C} \setminus \{\text{pôles}\}, \quad (3.1.21)$$

alors

$$q = \tilde{q}. \quad (3.1.22)$$

On renvoie à [Ben01, GS00, Tes09] pour des résultats dans le cas des fonctions de Weyl-Titchmarsh régulières et aux résultats récents [FY05, KST12] dans le cas des fonctions de Weyl-Titchmarsh singulières pour des équations éventuellement non-autoadjointes.

On note que les fonctions caractéristiques et les fonctions de Weyl-Titchmarsh généralisées définies pour chaque équation unidimensionnelle (3.1.19) peuvent être sommées sur l'espace engendré par les harmoniques  $Y_m$ ,  $m \geq 1$ , pour définir des opérateurs de

$L^2(\mathcal{T}^2, s^{11} dx^2 dx^3)$  sur lui-même. Plus précisément, en rappelant que

$$L^2(\mathcal{T}^2, s^{11} dx^2 dx^3) = \bigoplus_{m \geq 1} \langle Y_m \rangle,$$

on définit :

**Définition 3.1.12.** Soit  $\lambda \neq 0$  une énergie fixée. L'opérateur caractéristique  $\Delta(\lambda)$  et l'opérateur de Weyl-Titchmarsh généralisée  $M(\lambda)$  sont définis comme des opérateurs de  $L^2(\mathcal{T}^2, s^{11} dx^2 dx^3)$  sur lui-même qui sont diagonalisables sur une base hilbertienne de fonctions propres  $\{Y_m\}_{m \geq 1}$  associées respectivement aux valeurs propres  $\Delta_{q_{\nu_m^2}}(\mu_m^2)$  et  $M_{q_{\nu_m^2}}(\mu_m^2)$ . Plus précisément, tout  $v \in L^2(\mathcal{T}^2, s^{11} dx^2 dx^3)$  peut être décomposé sous la forme

$$v = \sum_{m \geq 1} v_m Y_m, \quad v_m \in \mathbb{C},$$

et

$$\Delta(\lambda)v = \sum_{m \geq 1} \Delta_{q_{\nu_m^2}}(\mu_m^2) v_m Y_m \quad \text{et} \quad M(\lambda)v = \sum_{m \geq 1} M_{q_{\nu_m^2}}(\mu_m^2) v_m Y_m.$$

On insiste sur le fait que la séparation des variables nous permet de “diagonaliser” les opérateurs de réflexion et de transmission en une famille dénombrable d'opérateurs de multiplication par les scalaires  $R_g(\lambda, \mu_m^2, \nu_m^2)$ ,  $L_g(\lambda, \mu_m^2, \nu_m^2)$  et  $T_g(\lambda, \mu_m^2, \nu_m^2)$  appelés respectivement les coefficients de réflexion et de transmission. On montrera (voir Équations (3.2.34)-(3.2.36)) que les fonctions caractéristiques et de Weyl-Titchmarsh ne sont respectivement rien d'autres que les coefficients de transmission et de réflexion. Le but de cette identification est d'utiliser le Théorème de Borg-Marchenko à partir de l'égalité des matrices de diffusion à énergie fixée.

Étape 2 : La seconde étape de la preuve consiste à résoudre le problème inverse pour la partie angulaire de la matrice de Stäckel. On commence notre preuve par une première réduction du problème. En effet, notre hypothèse principale est

$$S_g(\lambda) = S_{\tilde{g}}(\lambda)$$

et ces opérateurs agissent respectivement sur  $L^2(\mathcal{T}^2, s^{11} dx^2 dx^3)$  et  $L^2(\mathcal{T}^2, \tilde{s}^{11} dx^2 dx^3)$ .

On a donc

$$s^{11} = \tilde{s}^{11}.$$

Grâce à cette égalité et au choix de jauge  $f_2 = f_3 = 1$ , on montre facilement que

$$\begin{pmatrix} s_{22} & s_{23} \\ s_{32} & s_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \tilde{s}_{22} & \tilde{s}_{23} \\ \tilde{s}_{32} & \tilde{s}_{33} \end{pmatrix} G,$$

où  $G$  est une matrice constante de déterminant 1. Comme nous l'avons mentionné dans l'Introduction, la présence de la matrice  $G$  est due à une invariance de la métrique  $g$  par rapport à la définition de la matrice de Stäckel  $S$ . On peut donc supposer que  $G = I_2$  et on obtient ainsi que

$$\begin{pmatrix} s_{22} & s_{23} \\ s_{32} & s_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \tilde{s}_{22} & \tilde{s}_{23} \\ \tilde{s}_{32} & \tilde{s}_{33} \end{pmatrix}. \quad (3.1.23)$$

Dans un second temps on veut montrer que  $s_{21} = \tilde{s}_{21}$  et  $s_{31} = \tilde{s}_{31}$ . En utilisant la structure particulière des opérateurs  $H$  et  $L$ , on peut facilement montrer que

$$\begin{pmatrix} \partial_2^2 \\ \partial_3^2 \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} s_{23} & s_{22} \\ s_{33} & s_{32} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} H \\ L \end{pmatrix} + (\lambda^2 + 1) \begin{pmatrix} s_{21} \\ s_{31} \end{pmatrix}. \quad (3.1.24)$$

On applique alors l'Équation (3.1.24) à un vecteur d'harmoniques sphériques

$$\begin{pmatrix} Y_m \\ Y_m \end{pmatrix}.$$

On utilise la décomposition sur les harmoniques généralisées pour écrire  $Y_m = \sum_{p \in E_m} c_p \tilde{Y}_p$ ,  $m \geq 1$ , sur la base hilbertienne des harmoniques généralisées  $\{\tilde{Y}_m\}_{m \geq 1}$  et on identifie pour chaque  $p \in E_m$  le coefficient de l'harmonique  $\tilde{Y}_p$ . Ainsi, on obtient, grâce à (3.1.23), que pour tout  $p \in E_m$

$$- \begin{pmatrix} s_{23} & s_{22} \\ s_{33} & s_{32} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mu_m^2 \\ \nu_m^2 \end{pmatrix} + (\lambda^2 + 1) \begin{pmatrix} s_{21} \\ s_{31} \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} s_{23} & s_{22} \\ s_{33} & s_{32} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \tilde{\mu}_p^2 \\ \tilde{\nu}_p^2 \end{pmatrix} + (\lambda^2 + 1) \begin{pmatrix} \tilde{s}_{21} \\ \tilde{s}_{31} \end{pmatrix}.$$

On passe à gauche les termes constants par rapport aux variables  $x^2$  et  $x^3$  et à droite les autres termes. On obtient ainsi que

$$\begin{cases} s_{21}(x^2) = \tilde{s}_{21}(x^2) - C_1 s_{23}(x^2) - C_2 s_{22}(x^2) \\ s_{31}(x^3) = \tilde{s}_{31}(x^3) - C_1 s_{33}(x^3) - C_2 s_{32}(x^3) \end{cases},$$

où  $C_1$  et  $C_2$  sont des constantes réelles. On note que, comme nous l'avons déjà mentionné, ces égalités décrivent une invariance de la métrique  $g$  par rapport à la définition de la

matrice de Stäckel  $S$  et on peut donc choisir  $C_1 = C_2 = 0$ . Ainsi, on obtient

$$\begin{pmatrix} s_{21} \\ s_{31} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \tilde{s}_{21} \\ \tilde{s}_{31} \end{pmatrix}.$$

On conclut la Section 3.3 en notant que, grâce à ces résultats,  $H = \tilde{H}$  et  $L = \tilde{L}$ . Par conséquent, puisque les harmoniques généralisées dépendent uniquement de  $H$  et  $L$ , on peut choisir  $Y_m = \tilde{Y}_m$  et

$$\begin{pmatrix} \mu_m^2 \\ \nu_m^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \tilde{\mu}_m^2 \\ \tilde{\nu}_m^2 \end{pmatrix}, \quad \forall m \geq 1.$$

On insiste sur le fait que le choix des harmoniques généralisées n'est pas définies de façon unique dans chaque espace propre associé à une valeur propre de multiplicité au moins deux. Cependant, la matrice de diffusion ne dépend pas du choix des  $Y_m$  dans chaque espace propre.

Étape 3 : Dans un troisième temps on résout dans la Section 3.4 le problème inverse pour la partie radiale de la matrice de Stäckel. L'outil principal de cette Section est une version multivariable de la méthode de Complexification du Moment Angulaire. L'hypothèse principale du Théorème 3.1.25 implique que,

$$M(\mu_m^2, \nu_m^2) = \tilde{M}(\mu_m^2, \nu_m^2), \quad \forall m \geq 1.$$

Moralement, le but de la méthode de Complexification du Moment Angulaire est le suivant : à partir d'un ensemble discret d'informations (ici l'égalité des fonctions de Weyl-Titchmarsh sur le spectre couplé) on veut obtenir un régime continu d'informations (ici l'égalité de ces fonctions sur  $\mathbb{C}^2$ ). En d'autres termes, on veut étendre l'égalité précédente sur  $\mathbb{C}^2$ , i.e. que l'on veut montrer que

$$M(\mu^2, \nu^2) = \tilde{M}(\mu^2, \nu^2), \quad \forall (\mu, \nu) \in \mathbb{C}^2 \setminus P,$$

où  $P$  est l'ensemble des points  $(\mu, \nu) \in \mathbb{C}^2$  tels que les fonctions de Weyl-Titchmarsh n'existent pas en  $(\mu^2, \nu^2)$ , i.e. tels que les dénominateurs s'annulent. On procède comme suit. En rappelant que la fonction de Weyl-Titchmarsh est définie par (3.1.20), on considère l'application

$$\begin{aligned} \psi : \quad \mathbb{C}^2 &\rightarrow \mathbb{C} \\ (\mu, \nu) &\mapsto \tilde{\Delta}(\mu^2, \nu^2)\delta(\mu^2, \nu^2) - \Delta(\mu^2, \nu^2)\tilde{\delta}(\mu^2, \nu^2) \end{aligned}$$



et on veut montrer que  $\psi$  est identiquement nulle sur  $\mathbb{C}^2$ . Pour obtenir cette propriété on utilise un résultat d'unicité pour des fonctions holomorphes multivariable donné dans [Blo90] qui énonce, moralement, qu'une fonction holomorphe satisfaisant de bonnes estimations dans un certain cône et qui possède suffisamment de zéros dans ce cône est identiquement nulle. On commence ainsi par montrer que la fonction  $\psi$  est holomorphe et de type exponentiel par rapport aux variables  $\mu$  et  $\nu$ , i.e. que l'on peut trouver trois constantes positives  $A$ ,  $B$  et  $C$  telles que  $|\psi(\mu, \nu)|$  soit inférieur à  $C \exp(A|\operatorname{Re}(\mu)| + B|\operatorname{Re}(\nu)|)$ . À une correction exponentielle près, on obtient alors que  $\psi$  est holomorphe et bornée dans un certain cône de  $(\mathbb{R}^+)^2$ . Enfin, on quantifie le nombre de zéros de  $\psi$  dans ce cône en utilisant la connaissance de la distribution du spectre joint (sur lequel la fonction  $\psi$  s'annule) donnée par les travaux de Colin de Verdière [CdV79, CdV80]. On peut alors conclure que  $\psi = 0$ , i.e.

$$M(\mu^2, \nu^2) = \tilde{M}(\mu^2, \nu^2), \quad \forall (\mu, \nu) \in \mathbb{C}^2 \setminus P,$$

et par définition, on déduit de cette égalité que

$$M_{q_{\nu^2}}(\mu^2) = M_{\tilde{q}_{\nu^2}}(\mu^2), \quad \forall (\mu, \nu) \in \mathbb{C}^2 \setminus P.$$

Étape 4 : On utilise le célèbre Théorème de Borg-Marchenko (voir [DKN14, FY05]) pour obtenir

$$q_{\nu_m^2} = \tilde{q}_{\nu_m^2}, \quad \forall m \geq 1.$$

Puisque cette égalité est valable pour tout  $m \geq 1$ , on peut “découpler” le potentiel

$$q_{\nu_m^2} = -(\lambda^2 + 1) \frac{s_{11}}{s_{12}} + \nu_m^2 \frac{s_{13}}{s_{12}} + \frac{1}{16} \left( \left( \log \left( \frac{f_1}{s_{12}} \right) \right) \right)^2 - \frac{1}{4} \left( \log \left( \frac{f_1}{s_{12}} \right) \right).$$

et on obtient ainsi l'unicité du quotient

$$\frac{s_{13}}{s_{12}}$$

ainsi qu'une EDO sur les quotients

$$\frac{f_1}{s_{12}}, \quad \frac{\tilde{f}_1}{\tilde{s}_{12}} \quad \text{et} \quad \frac{s_{11}}{s_{12}}, \quad \frac{\tilde{s}_{11}}{\tilde{s}_{12}}.$$

On réécrit alors cette dernière EDO comme une EDO non-linéaire sur la fonction

$$u = \left( \frac{s_{12}}{f_1} \frac{\tilde{f}_1}{\tilde{s}_{12}} \right)^{\frac{1}{4}},$$

donnée par

$$u'' + \frac{1}{2}(\log(\tilde{h}))' u' + (\lambda^2 + 1)\tilde{h}(ls_{32} - s_{33})(s_{23} - ls_{22})(u^5 - u) = 0, \quad (3.1.25)$$

où

$$f = \frac{s_{11}}{s_{12}}, \quad h = \frac{s_{12}}{f_1} \quad \text{et} \quad l = \frac{s_{13}}{s_{12}} = \tilde{l}.$$

De plus,  $u$  satisfait les conditions de Cauchy aux bouts 0 et  $A$  donnée par

$$u(0) = u(A) = 1 \quad \text{et} \quad u'(0) = u'(A) = 0.$$

On note que  $u = 1$  est une solution de ce système et par unicité du problème de Cauchy on conclut que  $u = 1$ . On a donc montré que

$$\frac{f_1}{s_{12}} = \frac{\tilde{f}_1}{\tilde{s}_{12}}.$$

Enfin, en utilisant la condition de Robertson, on conclut que

$$\frac{s_{11}}{s_{12}} = \frac{\tilde{s}_{11}}{\tilde{s}_{12}} \quad \text{et} \quad \frac{s_{11}}{s_{13}} = \frac{\tilde{s}_{11}}{\tilde{s}_{13}}.$$

Ceci achève la preuve de la quatrième étape de notre preuve et ainsi, avec les étapes précédentes, la preuve du Théorème 3.1.25. On insiste sur le fait que l'on a transformé le problème non-linéaire implicite consistant à déterminer la métrique à partir de la connaissance de la matrice de diffusion à une énergie fixée en un problème non-linéaire explicite consistant à résoudre le problème de Cauchy associé à l'EDO non-linéaire (3.1.25).

Ce chapitre est organisé comme suit. Dans la Section 3.2 on résout le problème direct. Dans cette Section on étudie la séparation des variables pour l'équation de Helmholtz, on définit la fonction caractéristique et la fonction de Weyl-Titchmarsh pour différents choix de paramètres spectraux et on fait le lien entre ces différentes fonctions et les coefficients de diffusion. Dans la Section 3.3 on résout le problème inverse pour la partie angulaire de la matrice de Stäckel. Dans la Section 3.4 on résout le problème inverse pour la partie radiale de la matrice de Stäckel en utilisant une version multivariable de la méthode de Complexification du Moment Angulaire. Enfin, dans la Section 3.5, on achève la preuve

de notre Théorème 3.1.25.

## 3.2 Problème direct

Dans cette Section nous allons étudier le problème de diffusion directe pour l'équation de Helmholtz (3.2.1). On commence par procéder à la séparation des variables pour cette équation. Dans un second temps on définit plusieurs fonctions caractéristiques et fonctions de Weyl-Titchmarsh associées à des équations de Schrödinger unidimensionnelles en la variable radiale correspondant à différents choix de paramètres spectraux et on étudie le lien entre ces différentes fonctions et la matrice de diffusion associé à l'équation de Helmholtz.

### 3.2.1 Séparation des variables pour l'équation de Helmholtz

On considère l'équation de Helmholtz stationnaire décalée

$$-(\Delta_g + 1)f = \lambda^2 f, \quad (3.2.1)$$

où  $\lambda \neq 0$  est une énergie fixée, qui est étudiée de façon usuelle sur les variétés asymptotiquement hyperboliques (voir [Bor07, IK14, IKL14, JSB00]). En effet, il est connu (voir [IKL14]) que le spectre essentiel de  $-\Delta_g$  est  $[1, +\infty)$  et on décale ainsi le bas du spectre essentiel en 0. Il est connu que l'opérateur  $-\Delta_g - 1$  n'a pas de valeur propre plongée dans le spectre essentiel  $[0, +\infty)$  (voir [Bou13, IK14, IKL14]). On sait qu'il existe un système de coordonnées séparable pour l'équation de Helmholtz (3.2.1) si et seulement si la métrique (3.1.4) est sous forme de Stäckel et si de plus la condition de Robertson (3.1.6) est satisfaite. On insiste d'ailleurs sur le fait que contrairement au cas de la dimension deux étudié dans [DKN14], il est vraiment nécessaire en dimension trois que la condition de Robertson soit satisfaite.

**Lemme 3.2.1.** *L'équation de Helmholtz (3.2.1) peut être réécrite sous la forme*

$$A_1 f + s_{12} L f + s_{13} H f = 0, \quad (3.2.2)$$

où,

$$A_i = -\partial_i^2 + \frac{1}{2} \partial_i (\log(f_i)) \partial_i - (\lambda^2 + 1) s_{i1}, \quad \text{pour } i \in \{1, 2, 3\}, \quad (3.2.3)$$

et

$$L = -\frac{s_{33}}{s_{11}} A_2 + \frac{s_{23}}{s_{11}} A_3 \quad \text{et} \quad H = \frac{s_{32}}{s_{11}} A_2 - \frac{s_{22}}{s_{11}} A_3. \quad (3.2.4)$$

### 3.2. Problème direct

---

*Démonstration.* On rappelle que l'opérateur de Laplace-Beltrami est donné dans le système de coordonnées global  $(x^i)_{i=1,2,3}$  par

$$\Delta_g = \frac{1}{\sqrt{|g|}} \partial_i (\sqrt{|g|} g^{ij} \partial_j),$$

où  $|g|$  est le déterminant de la métrique et  $(g^{ij})$  est l'inverse de la métrique  $(g_{ij})$ . En utilisant le fait que

$$g^{ii} = \frac{1}{H_i^2}, \quad \sqrt{|g|} = H_1 H_2 H_3,$$

et la condition de Robertson (3.1.7), on montre facilement que

$$\Delta_g = \sum_{i=1}^3 \frac{1}{H_i^2} \left( \partial_i^2 - \frac{1}{2} \partial_i (\log(f_i)) \partial_i \right). \quad (3.2.5)$$

**Remarque 3.2.2.** On note que la condition de Robertson est équivalente à l'existence de trois fonctions  $f_i = f_i(x^i)$  telles que

$$\partial_i \log \left( \frac{H_i^4}{H_1^2 H_2^2 H_3^2} \right) = \partial_i \log(f_i), \quad \forall i \in \{1, 2, 3\}.$$

Cette égalité est intéressante puisqu'elle nous donne une expression de la condition de Robertson directement en termes des coefficients  $H_i^2$  de  $g$ .

Ainsi, de (3.2.5) on déduit immédiatement que l'équation de Helmholtz (3.2.1) peut être écrite sous la forme

$$\sum_{i=1}^3 \frac{1}{H_i^2} A_i^0 f = (\lambda^2 + 1) f, \quad (3.2.6)$$

où

$$A_i^0 = -\partial_i^2 + \frac{1}{2} \partial_i (\log(f_i)) \partial_i, \quad \text{pour } i \in \{1, 2, 3\}. \quad (3.2.7)$$

Si on multiplie l'Équation (3.2.6) par  $H_1^2$  et si on utilise que

$$H_1^2 = s_{11} + s_{21} \frac{s^{21}}{s^{11}} + s_{31} \frac{s^{31}}{s^{11}}, \quad \frac{H_1^2}{H_2^2} = \frac{s^{21}}{s^{11}} \quad \text{et} \quad \frac{H_1^2}{H_3^2} = \frac{s^{31}}{s^{11}},$$

on obtient

$$A_1 f + \frac{s^{21}}{s^{11}} A_2 f + \frac{s^{31}}{s^{11}} A_3 f = 0. \quad (3.2.8)$$

Enfin, en utilisant les égalités

$$\frac{s^{21}}{s^{11}} = -s_{12} \frac{s_{33}}{s^{11}} + s_{13} \frac{s_{32}}{s^{11}} \quad \text{et} \quad \frac{s^{31}}{s^{11}} = s_{12} \frac{s_{23}}{s^{11}} - s_{13} \frac{s_{22}}{s^{11}},$$

on déduit de (3.2.8) l'équation

$$A_1 f + s_{12} L f + s_{13} H f = 0,$$

où les opérateurs  $H$  et  $L$  sont donnés par (3.2.4). □

**Remarque 3.2.3.** *Puisque l'on a supposé que  $f_2$  et  $f_3$  sont constantes égales à 1 (voir la Remarque 3.1.22) on a*

$$A_2^0 = -\partial_2^2 \quad \text{et} \quad A_3^0 = -\partial_3^2.$$

**Remarque 3.2.4.** *On peut faire le lien entre les opérateurs angulaires  $H$  et  $L$  et les opérateurs  $\hat{P}_2$  et  $\hat{P}_3$  reliés à l'existence de 2-tenseurs de Killing vus dans le Théorème 3.1.14. Pour ce faire, on suit la construction donnée dans [KM84]. On considère ainsi, d'après l'Équation (2.21) de [KM84], pour  $i \in \{1, 2, 3\}$ , les opérateurs*

$$\hat{P}_i = \sum_{j=1}^3 \frac{s^{ji}}{\det(S)} \left( \partial_j^2 - \frac{1}{2} \partial_j \log(f_j) \partial_j \right).$$

En d'autres termes,

$$\begin{pmatrix} \hat{P}_1 \\ \hat{P}_2 \\ \hat{P}_3 \end{pmatrix} = -S^{-1} \begin{pmatrix} A_1^0 \\ A_2^0 \\ A_3^0 \end{pmatrix},$$

où  $A_i^0$  a été défini dans (3.2.7). On note que

$$\hat{P}_1 = \sum_{j=1}^3 \frac{s^{j1}}{\det(S)} \left( \partial_j^2 - \frac{1}{2} \partial_j \log(f_j) \partial_j \right) = \sum_{j=1}^3 \frac{1}{H_j^2} \left( \partial_j^2 - \frac{1}{2} \partial_j \log(f_j) \partial_j \right) = \Delta_g.$$

Puisque,

$$\begin{pmatrix} A_1^0 \\ A_2^0 \\ A_3^0 \end{pmatrix} = -S \begin{pmatrix} \hat{P}_1 \\ \hat{P}_2 \\ \hat{P}_3 \end{pmatrix},$$

on voit que

$$\begin{pmatrix} A_2^0 \\ A_3^0 \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} s_{22} & s_{23} \\ s_{32} & s_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \hat{P}_2 \\ \hat{P}_3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} s_{21} \hat{P}_1 \\ s_{31} \hat{P}_1 \end{pmatrix}.$$

### 3.2. Problème direct

Appliqués à des solutions de l'équation de Helmholtz (3.2.1) ces opérateurs coïncident avec

$$\begin{pmatrix} A_2^0 - (\lambda^2 + 1)s_{21} \\ A_3^0 - (\lambda^2 + 1)s_{31} \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} s_{22} & s_{23} \\ s_{32} & s_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \hat{P}_2 \\ \hat{P}_3 \end{pmatrix}.$$

Puisque

$$\begin{pmatrix} A_2^0 - (\lambda^2 + 1)s_{21} \\ A_3^0 - (\lambda^2 + 1)s_{31} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_2 \\ A_3 \end{pmatrix},$$

il suit que

$$\begin{pmatrix} \hat{P}_2 \\ \hat{P}_3 \end{pmatrix} = -\frac{1}{s^{11}} \begin{pmatrix} s_{33} & -s_{23} \\ -s_{32} & s_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A_2 \\ A_3 \end{pmatrix}.$$

En d'autres termes, appliqués à des solutions de (3.2.1), on a

$$\hat{P}_2 = -\frac{s_{33}}{s^{11}}A_2 + \frac{s_{23}}{s^{11}}A_3 \quad \text{et} \quad \hat{P}_3 = \frac{s_{32}}{s^{11}}A_2 - \frac{s_{22}}{s^{11}}A_3,$$

ou

$$\hat{P}_2 = L \quad \text{et} \quad \hat{P}_3 = H.$$

On insiste sur le fait que les opérateurs  $L$  et  $H$  et les opérateurs  $\hat{P}_2$  et  $\hat{P}_3$  coïncident respectivement seulement sur les solutions de l'équation de Helmholtz (3.2.1). De plus, grâce à [KM84] on sait que  $[\hat{P}_2, \hat{P}_3] = 0$ . Ainsi, les opérateurs  $L$  et  $H$  commutent. Enfin, les valeurs propres couplées des opérateurs  $L$  et  $H$  correspondent aux constantes de séparation de l'équation de Helmholtz.

Les opérateurs  $L$  et  $H$  sont d'un grand intérêt dans notre étude. Nous allons en particulier montrer qu'ils sont des opérateurs elliptiques dans le sens de la définition donnée dans [KKL01] que l'on rappelle maintenant. Soit  $a(y, D)$  un opérateur différentiel donné en coordonnées locales par

$$(a(y, D)f)(y) = -a^{jk}(y)\partial_j\partial_k f(y) - b^j(y)\partial_j f(y) - c(y)f(y),$$

où  $y = (x^2, x^3)$ ,  $\partial_j = \frac{\partial}{\partial x^j}$ ,  $j \in \{2, 3\}$ , les coefficients sont réels et  $(a^{jk})$  est une matrice symétrique. L'opérateur différentiel  $a(y, D)$  est alors dit elliptique si la matrice  $(a^{jk})$  est définie positive. On démontre alors le Lemme suivant.

**Lemme 3.2.5.** *Les opérateurs  $L$  et  $H$  satisfont les propriétés suivantes :*

1.  $LH = HL$ .
2.  $L$  et  $H$  sont des opérateurs elliptiques.

3.  $L$  et  $H$  sont des opérateurs autoadjoints sur l'espace  $L^2(\mathcal{T}^2, s^{11} dx^2 dx^3)$ .

4.  $L$  et  $H$  sont des opérateurs semi-bornés.

*Démonstration.* 1. La preuve de la commutativité des opérateurs  $L$  et  $H$  est plutôt simple puisque  $A_2$  et  $A_3$  sont des opérateurs qui commutent et  $s_{22}$  et  $s_{23}$  dépendent uniquement de  $x^2$  alors que  $s_{32}$  et  $s_{33}$  dépendent uniquement de  $x^3$ . On note que, puisque  $\hat{P}_2 = L$  et  $\hat{P}_3 = H$ , on savait déjà que ces opérateurs commutent grâce à [KM84].

2. D'après la définition des opérateurs  $L$  et  $H$  donnée dans (3.2.4), on sait que  $L$  est un opérateur elliptique si et seulement si la matrice

$$\begin{pmatrix} -\frac{s_{33}}{s^{11}} & 0 \\ 0 & \frac{s_{23}}{s^{11}} \end{pmatrix}$$

est définie positive alors que  $H$  est un opérateur elliptique si et seulement si la matrice

$$\begin{pmatrix} \frac{s_{32}}{s^{11}} & 0 \\ 0 & -\frac{s_{22}}{s^{11}} \end{pmatrix}$$

est définie positive. On rappelle que  $s_{22}, s_{33} < 0$  et  $s_{23}, s_{32} > 0$  (voir la condition (C) dans la Proposition 3.1.17) et que  $s^{11} > 0$  (voir la Remarque (3.1.18)). On peut ainsi conclure que  $L$  et  $H$  sont des opérateurs elliptiques.

3. On étudie seulement l'opérateur  $L$  puisque la preuve est la même pour l'opérateur  $H$ . On commence par noter que, pour trouver le poids  $s^{11}$  on peut utiliser l'exercice 2.19 de [KKL01] qui énonce qu'un opérateur  $A$  défini par

$$(Af)(y) = (a(y, D)f)(y) = -a^{jk}(y)\partial_j\partial_k f(y) + b^j(y)\partial_j f(y) + c(y)f(y),$$

est autoadjoint sur  $L^2(\mathcal{T}_y^2, mg^{\frac{1}{2}} dy)$  si et seulement si

$$a(y, D)f = -\frac{1}{mg^{\frac{1}{2}}}\partial_i \left( mg^{\frac{1}{2}} a^{ij} \partial_j f \right) + qf.$$

On rappelle que

$$L = \frac{s_{33}}{s^{11}} \partial_2^2 - \frac{s_{23}}{s^{11}} \partial_3^2 + q(x^2, x^3).$$

Ainsi,

$$\langle Lu, v \rangle = \left\langle \frac{s_{33}}{s^{11}} \partial_2^2 u, v \right\rangle + \left\langle -\frac{s_{23}}{s^{11}} \partial_3^2 u, v \right\rangle + \langle qu, v \rangle.$$

De plus,

$$\left\langle \frac{s_{33}}{s^{11}} \partial_2^2 u, v \right\rangle = \int_{\mathcal{T}^2} s_{33} (\partial_2^2 u) v \, dx^2 dx^3 = \int_{\mathcal{T}^2} s_{33} u (\partial_2^2 v) \, dx^2 dx^3,$$

puisque les termes de bord s'annulent par périodicité et que la fonction  $s_{33}$  ne dépend pas de  $x^2$ . Ainsi,

$$\left\langle \frac{s_{33}}{s^{11}} \partial_2^2 u, v \right\rangle = \left\langle u, \frac{s_{33}}{s^{11}} \partial_2^2 v \right\rangle.$$

Les deuxième et troisième termes peuvent être traités en suivant la même procédure. Finalement, on a bien montré que  $L$  est autoadjoint sur l'espace  $L^2(\mathcal{T}^2, s^{11} dx^2 dx^3)$ .

4. Puisque la preuve est la même pour l'opérateur  $H$  on donne seulement la preuve pour l'opérateur  $L$ .

$$\begin{aligned} \langle Lu, u \rangle &= \left\langle \left( -\frac{s_{33}}{s^{11}} A_2 + \frac{s_{23}}{s^{11}} A_3 \right) u, u \right\rangle \\ &= \left\langle \frac{s_{33}}{s^{11}} \partial_2^2 u, u \right\rangle + \left\langle -\frac{s_{23}}{s^{11}} \partial_3^2 u, u \right\rangle + (\lambda^2 + 1) \left\langle \frac{s_{33}s_{21} - s_{23}s_{31}}{s^{11}} u, u \right\rangle. \end{aligned}$$

On étudie maintenant chacun de ces termes.

$$\begin{aligned} \left\langle \frac{s_{33}}{s^{11}} \partial_2^2 u, u \right\rangle &= \int_{\mathcal{T}^2} \frac{s_{33}}{s^{11}} (\partial_2^2 u) u s^{11} \, dx^2 dx^3 \\ &= \int_{\mathcal{T}^2} s_{33} (\partial_2^2 u) u \, dx^2 dx^3 \\ &= \underbrace{[s_{33} (\partial_2 u) u]}_{=0 \text{ par périodicité}} + \int_{\mathcal{T}^2} (-s_{33}) (\partial_2 u)^2 \, dx^2 dx^3 \\ &\geq 0, \end{aligned}$$

puisque  $s_{33} < 0$ . De même,

$$\left\langle -\frac{s_{23}}{s^{11}} \partial_3^2 u, u \right\rangle \geq 0.$$

Enfin, puisque  $s_{ij} \in C^\infty(\mathcal{T}^2)$  pour  $i \in \{2, 3\}$  et  $j \in \{1, 2, 3\}$ , il existe  $m \in \mathbb{R}$  tel que

$$(\lambda^2 + 1) \left\langle \frac{s_{33}s_{21} - s_{23}s_{31}}{s^{11}} u, u \right\rangle \geq m \langle u, u \rangle.$$

□



**Remarque 3.2.6.** *Puisque les opérateurs  $H$  et  $L$  commutent, il existe une base hilbertienne commune de fonctions propres de  $H$  et  $L$ . De plus, l'ellipticité sur une variété compacte nous permet d'affirmer que le spectre est discret et le caractère autoadjoint prouve que le spectre est réel. Les harmoniques généralisées  $\{Y_m\}_{m \geq 1}$ , associées au spectre joint  $(\mu_m^2, \nu_m^2)$  pour  $(H, L)$ , forment une base hilbertienne de  $L^2(\mathcal{T}^2, s^{11}dx^2dx^3)$ , i.e.*

$$HY_m = \mu_m^2 Y_m \quad \text{et} \quad LY_m = \nu_m^2 Y_m, \quad \forall m \geq 1, \quad (3.2.9)$$

et

$$L^2(\mathcal{T}^2, s^{11}dx^2dx^3) = \bigoplus_{m \geq 1} \langle Y_m \rangle.$$

On ordonne le spectre couplé  $(\mu_m^2, \nu_m^2)$  de la façon suivante

1. En comptant la multiplicité :

$$\mu_1^2 < \mu_2^2 \leq \mu_3^2 \leq \mu_4^2 \leq \dots \leq \mu_n^2 \leq \dots \rightarrow \infty.$$

2. En partant de  $n = 1$  et par récurrence sur  $n$ , pour chaque  $n \geq 1$  tel que  $\mu_n^2$  est de multiplicité  $k$ , i.e.  $\mu_n^2 = \mu_{n+1}^2 = \dots = \mu_{n+k-1}^2$ , on ordonne les  $(\nu_j^2)_{n \leq j \leq n+k-1}$  correspondants de façon croissante, i.e., en comptant la multiplicité,

$$\nu_n^2 \leq \nu_{n+1}^2 \leq \dots \leq \nu_{n+k-1}^2.$$

La topologie de cylindre torique implique que les conditions de bord sont compatibles avec la décomposition sur les harmoniques communes  $\{Y_m\}_{m \geq 1}$  de  $H$  et  $L$ . On cherche ainsi des solutions de (3.2.1) sous la forme

$$f(x^1, x^2, x^3) = \sum_{m \geq 1} u_m(x^1) Y_m(x^2, x^3). \quad (3.2.10)$$

On utilise (3.2.10) dans (3.2.2) et on obtient que  $u_m$  satisfait, pour tout  $m \geq 1$ ,

$$-u'' + \frac{1}{2}(\log(f_1))'u' + [-(\lambda^2 + 1)s_{11} + \mu_m^2 s_{12} + \nu_m^2 s_{13}]u = 0.$$

Finalement, en inversant (3.2.9), on obtient

$$\begin{cases} A_2 Y_m = -(s_{22}\mu_m^2 + s_{23}\nu_m^2)Y_m \\ A_3 Y_m = -(s_{32}\mu_m^2 + s_{33}\nu_m^2)Y_m \end{cases}. \quad (3.2.11)$$

**Remarque 3.2.7.** Chaque harmonique  $Y_m(x^2, x^3)$ ,  $m \geq 1$ , peut être écrite comme un produit d'une fonction de la variable  $x^2$  et d'une fonction de la variable  $x^3$ . En effet, soient  $(f_2, g_2)$  et  $(f_3, g_3)$  des systèmes fondamentaux périodiques de solutions respectivement associés aux opérateurs  $A_2$  et  $A_3$ . On peut ainsi écrire  $Y_m(x^2, x^3)$  sous la forme

$$Y_m(x^2, x^3) = a(x^3)f_2(x^2) + b(x^3)g_2(x^2).$$

On applique alors l'opérateur  $A_3$  à cette égalité et on obtient que

$$A_3(Y_m)(x^2, x^3) = A_3(a)(x^3)f_2(x^2) + A_3(b)(x^3)g_2(x^2).$$

Ainsi, en utilisant que  $A_3Y_m = -(s_{32}\mu_m^2 + s_{33}\nu_m^2)Y_m$  et le fait que  $(f_2, g_2)$  soit un système fondamental de solutions on obtient que

$$Y_m(x^2, x^3) = af_2(x^2)f_3(x^3) + bf_2(x^2)g_3(x^3) + cg_2(x^2)f_3(x^3) + dg_2(x^2)g_3(x^3),$$

où  $a, b, c$  et  $d$  sont des constantes réelles. Ainsi, pour chaque valeur propre couplée  $(\mu_m^2, \nu_m^2)$ ,  $m \geq 1$ , l'espace propre correspondant pour le couple d'opérateurs  $(H, L)$  est au plus de dimension quatre. Cependant, la diagonalisation de la matrice de diffusion  $S_g(\lambda)$  ne dépend pas du choix des harmoniques dans chaque espace propre associé à une valeur propre du spectre couplé  $(\mu_m^2, \nu_m^2)$  et on peut ainsi choisir comme harmoniques  $Y_m = f_2f_3$ ,  $Y_m = f_2g_3$ ,  $Y_m = g_2f_3$  et  $Y_m = g_2g_3$ . On peut donc supposer que  $Y_m(x^2, x^3)$  est le produit d'une fonction de la variable  $x^2$  et d'une fonction de la variable  $x^3$ .

**Lemme 3.2.8.** Toute solution  $u \in H^1(\mathcal{M})$  de  $-(\Delta_g + 1)u = \lambda^2 u$ , peut être écrite sous la forme

$$u = \sum_{m \geq 1} u_m(x^1)Y_m(x^2, x^3),$$

où  $Y_m(x^2, x^3) = v_m(x^2)w_m(x^3)$  et

$$\begin{cases} -u_m'' + \frac{1}{2}(\log(f_1))'u_m' + [-(\lambda^2 + 1)s_{11} + \mu_m^2 s_{12} + \nu_m^2 s_{13}]u_m = 0 \\ -v_m'' + [-(\lambda^2 + 1)s_{21} + \mu_m^2 s_{22} + \nu_m^2 s_{23}]v_m = 0 \\ -w_m'' + [-(\lambda^2 + 1)s_{31} + \mu_m^2 s_{32} + \nu_m^2 s_{33}]w_m = 0 \end{cases}.$$

Du Lemme 3.2.8 on peut déduire des informations sur les valeurs propres  $(\mu_m^2)_{m \geq 1}$  et  $(\nu_m^2)_{m \geq 1}$ . En effet, on peut prouver le Lemme suivant qui sera utile par la suite.

**Lemme 3.2.9.** Il existe des constantes réelles  $C_1, C_2, D_1$  et  $D_2$  telles que pour tout

$m \geq 1$ ,

$$C_1 \mu_m^2 + D_1 \leq \nu_m^2 \leq C_2 \mu_m^2 + D_2,$$

où

$$C_1 = \min \left( -\frac{s_{32}}{s_{33}} \right) > 0 \quad \text{et} \quad C_2 = -\min \left( \frac{s_{22}}{s_{23}} \right) > 0.$$

*Démonstration.* On commence par rappeler les équations angulaires du Lemme 3.2.8 :

$$-v''(x^2) + \left[ -(\lambda^2 + 1)s_{21}(x^2) + \mu_m^2 s_{22}(x^2) + \nu_m^2 s_{23}(x^2) \right] v(x^2) = 0 \quad (3.2.12)$$

et

$$-w''(x^3) + \left[ -(\lambda^2 + 1)s_{31}(x^3) + \mu_m^2 s_{32}(x^3) + \nu_m^2 s_{33}(x^3) \right] w(x^3) = 0. \quad (3.2.13)$$

On utilise un changement de variable de Liouville dans (3.2.12) pour transformer cette équation en une équation de Schrödinger dans laquelle  $-\nu_m^2$  est le paramètre spectral. Ainsi, on introduit le difféomorphisme

$$X^2 = g_2(x^2) = \int_0^{x^2} \sqrt{s_{23}(t)} \, dt$$

et on définit

$$v(X^2, \mu_m^2, \nu_m^2) = v(h_2(X^2), \mu_m^2, \nu_m^2),$$

où  $h_2 = g_2^{-1}$  est l'inverse de la fonction  $g_2$ . On introduit également un poids pour faire disparaître le terme d'ordre 1. On définit ainsi

$$V(X^2, \mu_m^2, \nu_m^2) = \left( \frac{1}{s_{23}(h_2(X^2))} \right)^{-\frac{1}{4}} v(h_2(X^2), \mu_m^2, \nu_m^2).$$

Après calculs, on obtient que  $V(X^2, \mu_m^2, \nu_m^2)$  satisfait, en la variable  $X^2$ , l'équation de Schrödinger

$$-\ddot{V}(X^2, \mu_m^2, \nu_m^2) + p_{\mu_m^2, 2}(X^2, \lambda) V(X^2, \mu_m^2, \nu_m^2) = -\nu_m^2 V(X^2, \mu_m^2, \nu_m^2), \quad (3.2.14)$$

où,

$$p_{\mu_m^2, 2}(X^2, \lambda) = -(\lambda^2 + 1) \frac{s_{21}(X^2)}{s_{23}(X^2)} + \mu_m^2 \frac{s_{22}(X^2)}{s_{23}(X^2)}, \quad (3.2.15)$$

avec  $s_{21}(X^2) := s_{21}(h_2(X^2))$ ,  $s_{22}(X^2) := s_{22}(h_2(X^2))$  et  $s_{23}(X^2) := s_{23}(h_2(X^2))$ . On

### 3.2. Problème direct

---

suit la même procédure pour (3.2.13) en posant

$$X^3 = g_3(x^3) = \int_0^{x^3} \sqrt{-s_{33}(t)} dt$$

et

$$W(X^3, \mu_m^2, \nu_m^2) = \left( \frac{1}{-s_{33}(h_3(X^3))} \right)^{-\frac{1}{4}} w(h_3(X^3), \mu_m^2, \nu_m^2)$$

et on obtient que  $W(X^3)$  satisfait, en la variable  $X^3$ , l'équation de Schrödinger

$$-\ddot{W}(X^3, \mu_m^2, \nu_m^2) + p_{\mu_m^2, 3}(X^3, \lambda)W(X^3, \mu_m^2, \nu_m^2) = \nu_m^2 W(X^3, \mu_m^2, \nu_m^2), \quad (3.2.16)$$

où,

$$p_{\mu_m^2, 3}(X^3, \lambda) = (\lambda^2 + 1) \frac{s_{31}(X^3)}{s_{33}(X^3)} - \mu_m^2 \frac{s_{32}(X^3)}{s_{33}(X^3)}, \quad (3.2.17)$$

avec  $s_{31}(X^3) := s_{31}(h_3(X^3))$ ,  $s_{32}(X^3) := s_{32}(h_3(X^3))$  et  $s_{33}(X^3) := s_{33}(h_3(X^3))$ . On suppose maintenant que  $\mu_m^2$  est fixé et on regarde (3.2.14) et (3.2.16) comme des problèmes aux valeurs propres en  $\pm \nu_m^2$ . On suppose que  $\mu_m^2$  a pour multiplicité  $k \geq 1$  et on utilise les notations données dans la Remarque 3.2.6, i.e. que l'on veut montrer que

$$C_1 \mu_m^2 + D_2 \leq \nu_j^2 \leq C_2 \mu_m^2 + D_2, \quad \forall m \leq j \leq m + k - 1,$$

où  $\nu_j^2 \leq \nu_{j+1}^2$  pour tout  $j \in \{m, \dots, m + k - 1\}$ . On sait que le spectre des opérateurs

$$P_2 = -\frac{d^2}{(dX^2)^2} + p_{\mu_m^2, 2} \quad \text{et} \quad P_3 = -\frac{d^2}{(dX^3)^2} + p_{\mu_m^2, 3}$$

sont respectivement inclus dans

$$[\min(p_{\mu_m^2, 2}), +\infty) \quad \text{et} \quad [\min(p_{\mu_m^2, 3}), +\infty).$$

La première condition nous donne que

$$-\nu_j^2 \geq -C_2 \mu_m^2 - D_2, \quad \text{où} \quad -C_2 = \min\left(\frac{s_{22}}{s_{23}}\right) \quad \text{et} \quad -D_2 = (\lambda^2 + 1) \min\left(-\frac{s_{21}}{s_{23}}\right)$$

alors que la seconde nous donne que

$$\nu_j^2 \geq C_1 \mu_m^2 + D_1, \quad \text{où} \quad C_1 = \min\left(-\frac{s_{32}}{s_{33}}\right) \quad \text{et} \quad D_1 = (\lambda^2 + 1) \min\left(\frac{s_{31}}{s_{33}}\right).$$

Puisque  $(\nu_j^2)_{m \leq j \leq m+k-1}$  est l'ensemble des valeurs propres de (3.2.12) et (3.2.13), pour un  $\mu_m^2$  fixé avec multiplicité  $k$  on obtient à partir de ces estimations que

$$C_1 \mu_m^2 + D_1 \leq \nu_j^2 \leq C_2 \mu_m^2 + D_2, \quad \forall m \leq j \leq m+k-1.$$

En d'autres termes, grâce à notre numération du spectre joint expliquée dans la Remarque 3.2.6,

$$C_1 \mu_m^2 + D_1 \leq \nu_m^2 \leq C_2 \mu_m^2 + D_2, \quad \forall m \geq 1.$$

□

**Remarque 3.2.10.** 1. Grâce à la condition donnée dans la Remarque 3.1.18,

$$C_1 = \min \left( -\frac{s_{32}}{s_{33}} \right) < -\min \left( \frac{s_{22}}{s_{23}} \right) = C_2.$$

2. Le Lemme précédent affirme que le spectre joint  $\{(\mu_m^2, \nu_m^2), m \geq 1\}$  appartient à un cône contenu dans le quadrant  $(\mathbb{R}^+)^2$  (à un décalage éventuel près dû à la présence des constantes  $D_1$  et  $D_2$ ). De plus, puisque la multiplicité de  $\mu_m^2$  est finie pour tout  $m \geq 1$ , il existe un nombre fini de points du spectre joint sur chaque ligne verticale. On peut résumer ces faits par la figure générique suivante :

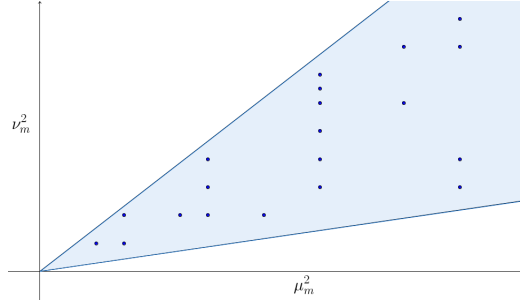


FIGURE 3.1 – Spectre joint

3. La loi de Weyl (voir [KKL01] Theorem 2.21) qui affirme (en dimension deux) qu'il existe une constante  $C$  telle que les valeurs propres soient équivalentes pour  $m$  grand à  $Cm$ , est satisfaite par les valeurs propres  $\{\mu_m^2\}_m$  et  $\{\nu_m^2\}_m$  mais nous devons ordonner ces suites de façon croissante pour pouvoir l'utiliser. Or, nous avons ordonné le spectre joint de telle sorte que la suite  $(\nu_m^2)$  n'est pas forcément croissante.

4. Une valeur propre du spectre joint  $(\mu_m^2, \nu_m^2)$  est de multiplicité au plus quatre comme cela a été mentionné dans la Remarque 3.2.7.

**Exemple 3.2.1.** On peut illustrer la notion de spectre couplé sur les exemples donnés dans l'Exemple 3.1.2.

1. On définit la matrice de Stäckel

$$S_1 = \begin{pmatrix} s_{11}(x^1) & s_{12}(x^1) & s_{13}(x^1) \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Dans ce cas  $H = -\partial_3^2$  et  $L = -\partial_2^2$  et on note que ces opérateurs peuvent être obtenus par dérivation des champs de vecteurs de Killing  $\partial_2$  et  $\partial_3$ . Le spectre couplé de ces opérateurs est  $\{(m^2, n^2), (m, n) \in \mathbb{Z}^2\}$  et on peut décomposer l'espace  $L^2(\mathcal{T}^2, s^{11}dx^2dx^3)$  sur la base des harmoniques généralisées  $Y_{mn}(x^2, x^3) = e^{imx^2 + inx^3}$ . On note que le spectre couplé n'est pas inclus dans un cône strictement contenu dans  $(\mathbb{R}^+)^2$  mais il n'y a pas de contradiction avec le Lemme 3.2.9 puisque la matrice de Stäckel  $S_1$  ne satisfait pas la condition (C). Cependant, on peut utiliser les invariances décrites dans la Proposition 3.1.16 pour se ramener à notre cadre de travail (cette transformation modifiant le spectre couplé). En effet, on peut obtenir la matrice de Stäckel

$$S_2 = \begin{pmatrix} s_{11}(x^1) & s_{12}(x^1) & s_{13}(x^1) \\ a & b & c \\ d & e & f \end{pmatrix},$$

où  $s_{11}$ ,  $s_{12}$  et  $s_{13}$  sont des fonctions lisses de  $x^1$  et  $a$ ,  $b$ ,  $c$ ,  $d$ ,  $e$  et  $f$  sont des constantes réelles telles que  $b, f < 0$  et  $c, e > 0$ . Dans le cas de la matrice  $S_2$  on a

$$H = -\frac{s_{32}}{s_{11}}\partial_2^2 + \frac{s_{22}}{s_{11}}\partial_3^2 = -\frac{e}{bf - ce}\partial_2^2 + \frac{b}{bf - ce}\partial_3^2$$

et

$$L = \frac{s_{33}}{s_{11}}\partial_2^2 - \frac{s_{23}}{s_{11}}\partial_3^2 = \frac{f}{bf - ce}\partial_2^2 - \frac{c}{bf - ce}\partial_3^2.$$

Ainsi, le spectre couplé des opérateurs  $H$  et  $L$  peut être calculé en utilisant la même procédure que celle utilisée pour  $S_1$ .

On insiste sur le fait que dans le cas de la matrice de Stäckel  $S_1$  le spectre joint est en réalité découplé. On peut ainsi geler un moment angulaire et laisser l'autre

parcourir l'ensemble des entiers. Après l'utilisation de l'invariance pour se ramener à notre cadre ces demi-droites verticales ou horizontales sont transformées en des demi-droites contenues dans notre cône de  $(\mathbb{R}^+)^2$ . Ceci nous permet d'utiliser la méthode de Complexification du Moment Angulaire usuelle sur une demi-droite contenue dans notre cône.

2. On définit la matrice de Stäckel

$$S = \begin{pmatrix} s_{11}(x^1) & s_{12}(x^1) & as_{12}(x^1) \\ 0 & s_{22}(x^2) & s_{23}(x^2) \\ 0 & s_{32}(x^3) & s_{33}(x^3) \end{pmatrix},$$

où  $s_{11}$  et  $s_{12}$  sont des fonctions lisses de la variable  $x^1$ ,  $s_{22}$  et  $s_{23}$  sont des fonctions lisses de  $x^2$ ,  $s_{32}$  et  $s_{33}$  sont des fonctions lisses de  $x^3$  et  $a$  est une constante réelle. Dans ce cas, l'équation de Helmholtz (3.2.1) peut être réécrite sous la forme

$$A_1 f + s_{12}(L + aH)f = 0.$$

Ainsi, la séparation des variables ne dépend que d'un seul opérateur angulaire donné par  $L + aH$  dont les propriétés peuvent être facilement déduites de celles démontrées pour  $H$  et  $L$ . En particulier, l'ensemble des moments angulaires est donné par  $\omega_m^2 = \mu_m^2 + \nu_m^2$ ,  $m \geq 1$ , et peut être utilisé pour appliquer une méthode de Complexification du Moment Angulaire. On note que, même si les spectres  $(\mu_m^2, \nu_m^2)$  sont couplés, seul le spectre  $\omega_m^2$  apparaît dans l'équation radiale séparée.

3. Dans le cas de la matrice de Stäckel

$$S = \begin{pmatrix} s_1(x^1)^2 & -s_1(x^1) & 1 \\ -s_2(x^2)^2 & s_2(x^2) & -1 \\ s_3(x^3)^2 & -s_3(x^3) & 1 \end{pmatrix},$$

où  $s_1$  est une fonction lisse de la variable  $x^1$ ,  $s_2$  est une fonction lisse de  $x^2$  et  $s_3$  est une fonction lisse de  $x^3$ , il n'y a pas de symétrie triviale. On est ainsi dans le cas général et l'on est obligé d'utiliser la méthode générale décrite ici.

### 3.2.2 Première construction de la fonction caractéristique et de la fonction de Weyl-Titchmarsh

Le but de cette Section est de définir la fonction caractéristique et la fonction de Weyl-Titchmarsh associées à l'équation radiale en choisissant  $-\mu_m^2$  comme paramètre spectral. On rappelle que l'équation radiale est

$$-u'' + \frac{1}{2}(\log(f_1))'u' + [-(\lambda^2 + 1)s_{11} + \mu_m^2 s_{12} + \nu_m^2 s_{13}]u = 0, \quad (3.2.18)$$

où les fonctions dépendent uniquement de la variable  $x^1$ . On choisit  $-\mu^2 := -\mu_m^2$  comme paramètre spectral. Pour ce faire, comme nous l'avons mentionné dans l'introduction, on utilise un changement de variable de Liouville :

$$X^1 = g(x^1) = \int_0^{x^1} \sqrt{s_{12}(t)} dt$$

et on définit

$$u(X^1, \mu^2, \nu^2) = u(h(X^1), \mu^2, \nu^2),$$

où  $h = g^{-1}$  est l'inverse de la fonction  $g_1$  et  $\nu^2 := \nu_m^2$ . Dans un second temps, pour supprimer le terme d'ordre un résultant de cette transformation et ainsi obtenir une équation de Schrödinger, on introduit un poids. Précisément, on définit

$$U(X^1, \mu^2, \nu^2) = \left( \frac{f_1}{s_{12}}(h(X^1)) \right)^{-\frac{1}{4}} u(h(X^1), \mu^2, \nu^2). \quad (3.2.19)$$

Après calculs, on obtient que  $U(X^1, \mu^2, \nu^2)$  satisfait, en la variable  $X^1$ , l'équation de Schrödinger

$$-\ddot{U}(X^1, \mu^2, \nu^2) + q_{\nu^2}(X^1, \lambda)U(X^1, \mu^2, \nu^2) = -\mu^2 U(X^1, \mu^2, \nu^2), \quad (3.2.20)$$

où,

$$\begin{aligned} q_{\nu^2}(X^1, \lambda) = & -(\lambda^2 + 1) \frac{s_{11}(X^1)}{s_{12}(X^1)} + \nu^2 \frac{s_{13}(X^1)}{s_{12}(X^1)} \\ & + \frac{1}{16} \left( \left( \log \left( \frac{\dot{f}_1(X^1)}{s_{12}(X^1)} \right) \right)^2 - \frac{1}{4} \left( \log \left( \frac{\ddot{f}_1(X^1)}{s_{12}(X^1)} \right) \right) \right). \end{aligned} \quad (3.2.21)$$

avec  $\dot{f} = \frac{df}{dX^1}$ ,  $f_1(X^1) := f_1(h_1(X^1))$ ,  $s_{11}(X^1) := s_{11}(h_1(X^1))$ ,  $s_{12}(X^1) := s_{12}(h_1(X^1))$  et  $s_{13}(X^1) := s_{13}(h_1(X^1))$ .



**Lemme 3.2.11.** *Le potentiel  $q_{\nu^2}$  satisfait, au bout  $\{X^1 = 0\}$ ,*

$$q_{\nu^2}(X^1, \lambda) = -\frac{\lambda^2 + \frac{1}{4}}{(X^1)^2} + q_{0,\nu^2}(X^1, \lambda),$$

où  $X^1 q_{0,\nu^2}(X^1, \lambda) \in L^1\left(0, \frac{A^1}{2}\right)$  avec  $A^1 = g(A)$ . De même, au bout  $\{X^1 = A^1\}$ ,

$$q_{\nu^2}(X^1, \lambda) = -\frac{\lambda^2 + \frac{1}{4}}{(A^1 - X^1)^2} + q_{A^1,\nu^2}(X^1, \lambda),$$

où  $(A^1 - X^1)q_{A^1,\nu^2}(X^1, \lambda) \in L^1\left(\frac{A^1}{2}, A^1\right)$ .

*Démonstration.* On commence par noter que puisque  $s_{12}(x^1) \sim 1$  lorsque  $x^1 \rightarrow 0$  on obtient par définition de  $X^1$  que  $X^1 \sim x^1$ , lorsque  $x^1 \rightarrow 0$ . Ainsi, on peut utiliser les conditions d'hyperbolicité (3.1.9) directement en la variable  $X^1$ . Le Lemme est alors une conséquence de ces conditions.  $\square$

On suit maintenant le l'article [DKN14] afin de définir la fonction caractéristique et la fonction de Weyl-Titchmarsh associées à l'Équation (3.2.20). Pour ce faire, on introduit deux systèmes fondamentaux de solutions  $S_{jn}$ ,  $j \in \{1, 2\}$  et  $n \in \{0, 1\}$ , définis par

1. Lorsque  $X^1 \rightarrow 0$ ,

$$S_{10}(X^1, \mu^2, \nu^2) \sim (X^1)^{\frac{1}{2}-i\lambda} \quad \text{et} \quad S_{20}(X^1, \mu^2, \nu^2) \sim \frac{1}{2i\lambda}(X^1)^{\frac{1}{2}+i\lambda} \quad (3.2.22)$$

et lorsque  $X^1 \rightarrow A^1$ ,

$$S_{11}(X^1, \mu^2, \nu^2) \sim (A^1 - X^1)^{\frac{1}{2}-i\lambda} \quad \text{et} \quad S_{21}(X^1, \mu^2, \nu^2) \sim -\frac{1}{2i\lambda}(A^1 - X^1)^{\frac{1}{2}+i\lambda}. \quad (3.2.23)$$

2.  $W(S_{1n}, S_{2n}) = 1$  pour  $n \in \{0, 1\}$ .

3. Pour tout  $X^1 \in (0, A^1)$ ,  $\mu \mapsto S_{jn}(X^1, \mu^2, \nu^2)$  est une fonction entière pour  $j \in \{1, 2\}$  et  $n \in \{0, 1\}$ .

Comme dans [DKN14, FY05], on ajoute des conditions de bord singulières aux bouts  $\{X^1 = 0\}$  et  $\{X^1 = A^1\}$  et on considère (3.2.20) comme un problème aux valeurs propres. Plus précisément, on considère les conditions

$$U(u) := W(S_{10}, u)|_{X^1=0} = 0 \quad \text{et} \quad V(u) := W(S_{11}, u)|_{X^1=A^1} = 0, \quad (3.2.24)$$

### 3.2. Problème direct

---

où  $W(f, g)$  est le Wronskien de  $f$  et  $g$ . Finalement, on peut définir les fonctions caractéristiques

$$\Delta_{q_{\nu^2}}(\mu^2) = W(S_{11}, S_{10}) \quad \text{et} \quad \delta_{q_{\nu^2}}(\mu^2) = W(S_{11}, S_{20}) \quad (3.2.25)$$

et la fonction de Weyl-Titchmarsh

$$M_{q_{\nu^2}}(\mu^2) = -\frac{W(S_{11}, S_{20})}{W(S_{11}, S_{10})} = -\frac{\delta_{q_{\nu^2}}(\mu^2)}{\Delta_{q_{\nu^2}}(\mu^2)}. \quad (3.2.26)$$

**Remarque 3.2.12.** *La fonction de Weyl-Titchmarsh est l'unique fonction telle que la solution de (3.2.20) donnée par*

$$\Phi(X^1, \mu^2, \nu^2) = S_{10}(X^1, \mu^2, \nu^2) + M_{q_{\nu^2}}(\mu^2) S_{10}(X^1, \mu^2, \nu^2),$$

*satisfait la condition de bord au bout  $\{X^1 = A^1\}$ .*

Une conséquence immédiate de la troisième condition de la définition des systèmes fondamentaux de solutions est donnée par le Lemme suivant.

**Lemme 3.2.13.** *Pour tout  $\nu$  fixé, les applications*

$$\mu \mapsto \Delta_{q_{\nu^2}}(\mu^2) \quad \text{et} \quad \mu \mapsto \delta_{q_{\nu^2}}(\mu^2)$$

*sont entières.*

Dans la suite (voir les Sections 3.2.4 et 3.2.5), on définira d'autres fonctions caractéristiques et de Weyl-Titchmarsh qui correspondent à d'autres choix de paramètres spectraux, à savoir  $-\nu_m^2$  et  $-(\mu_m^2 + \nu_m^2)$ . On étudie ici l'influence de ces différents choix.

**Proposition 3.2.14.** *Soient  $\check{X}^1 = \check{g}(x^1)$  un changement de variable et  $\check{p}$  un poids, alors*

$$U(X^1, \mu^2, \nu^2) = \frac{p(h(X^1))}{\check{p}(\check{h}(\check{X}^1))} \check{U}((\check{g} \circ h)(X^1), \mu^2, \nu^2)$$

*et*

$$V(X^1, \mu^2, \nu^2) = \frac{p(h(X^1))}{\check{p}(\check{h}(\check{X}^1))} \check{V}((\check{g} \circ h)(X^1), \mu^2, \nu^2),$$

*où*

$$p(h(X^1)) = \left( \frac{f_1}{s_{12}}(h(X^1)) \right)^{-\frac{1}{4}},$$

$$\check{U}(\check{X}^1, \mu^2, \nu^2) = \check{p}(\check{h}(\check{X}^1)) u(\check{h}(\check{X}^1), \mu^2, \nu^2),$$

et

$$\check{V}(\check{X}^1, \mu^2, \nu^2) = \check{p}(\check{h}(\check{X}^1))v(\check{h}(\check{X}^1), \mu^2, \nu^2).$$

De plus,

$$W_{X^1}(U, V) = \left( \frac{p(h(X^1))}{\check{p}(\check{h}(\check{X}^1))} \right)^2 \partial_{X^1}(\check{g} \circ h)(X^1) W_{\check{X}^1}(\check{U}, \check{V}).$$

**Corollaire 3.2.15.** Soient  $\hat{X}^1$  et  $\check{X}^1$  deux changements de variable de Liouville définis par

$$\hat{X}^1 = \hat{g}(x^1) = \int_0^{x^1} \sqrt{s_{13}(t)} dt \quad \text{et} \quad \check{X}^1 = \check{g}(x^1) = \int_0^{x^1} \sqrt{r_{\mu^2, \nu^2}(t)} dt,$$

où

$$r_{\mu^2, \nu^2}(x^1) := \frac{\mu^2 s_{12}(x^1) + \nu^2 s_{13}(x^1)}{\mu^2 + \nu^2},$$

et soient  $\hat{p}$  et  $\check{p}$  deux poids définis par

$$\hat{p}(\hat{h}(\hat{X}^1)) = \left( \frac{f_1}{s_{13}}(\hat{h}(\hat{X}^1)) \right)^{-\frac{1}{4}} \quad \text{et} \quad \check{p}(\check{h}(\check{X}^1)) = \left( \frac{f_1}{r_{\mu^2, \nu^2}}(\check{h}(\check{X}^1)) \right)^{-\frac{1}{4}}.$$

Soient  $\hat{U}$  et  $\hat{V}$  définis par

$$\hat{U}(\hat{X}^1, \mu^2, \nu^2) = \hat{p}(\hat{h}(\hat{X}^1))u(\hat{h}(\hat{X}^1), \mu^2, \nu^2),$$

$$\hat{V}(\hat{X}^1, \mu^2, \nu^2) = \hat{p}(\hat{h}(\hat{X}^1))v(\hat{h}(\hat{X}^1), \mu^2, \nu^2),$$

et  $\check{U}$  et  $\check{V}$  définis par

$$\check{U}(\check{X}^1, \mu^2, \nu^2) = \check{p}(\check{h}(\check{X}^1))u(\check{h}(\check{X}^1), \mu^2, \nu^2),$$

$$\check{V}(\check{X}^1, \mu^2, \nu^2) = \check{p}(\check{h}(\check{X}^1))v(\check{h}(\check{X}^1), \mu^2, \nu^2).$$

Alors,

$$W_{X^1}(U, V) = W_{\hat{X}^1}(\hat{U}, \hat{V}) = W_{\check{X}^1}(\check{U}, \check{V}).$$

**Remarque 3.2.16.** On utilisera  $\hat{X}^1$  et  $\hat{p}$  dans la Section 3.2.4 pour obtenir des propriétés d'holomorphic ainsi que de bonnes estimations en la variable  $\nu^2$ . Dans un second temps, on utilisera  $\check{X}^1$  et  $\check{p}$  dans la Section 3.2.5 pour montrer que les fonctions caractéristiques sont bornées pour  $(\mu, \nu) \in (i\mathbb{R})^2$ .

### 3.2.3 Lien entre les coefficients de diffusion et les fonctions caractéristique et de Weyl-Titchmarsh

Dans cette Section, on suit [DKN14], Section 3.3, et on fait le lien entre les coefficients de transmission et de réflexion, correspondant à la restriction des opérateurs de transmission et de réflexion sur chaque harmonique généralisée, et les fonctions caractéristiques et de Weyl-Titchmarsh définies dans la Section 3.2.2. Pour commencer on observe que l'opérateur de diffusion défini dans le Théorème 3.1.24 laisse invariant chaque espace engendré par les harmoniques généralisées  $Y_m$ . Ainsi, il suffit de calculer la matrice de diffusion sur chaque espace engendré par les  $Y_m$ . Pour ce faire, on rappelle que, comme nous l'avons vu dans le Théorème 3.1.24, étant donnée une solution  $f = u_m(x^1)Y_m(x^2, x^3) \in \mathcal{B}^\star$  de (3.2.1), il existe un unique vecteur  $\psi_m^{(\pm)} = (\psi_{0m}^\pm, \psi_{1m}^\pm) \in \mathbb{C}^2$  tel que

$$\begin{aligned} u_m(x^1) \simeq & \omega_-(\lambda) \left( \chi_0(x^1)^{\frac{1}{2}+i\lambda} \psi_{0m}^{(-)} + \chi_1(A-x^1)^{\frac{1}{2}+i\lambda} \psi_{1m}^{(-)} \right) \\ & - \omega_+(\lambda) \left( \chi_0(x^1)^{\frac{1}{2}-i\lambda} \psi_{0m}^{(+)} + \chi_1(A-x^1)^{\frac{1}{2}-i\lambda} \psi_{1m}^{(+)} \right), \end{aligned} \quad (3.2.27)$$

où les  $\omega_\pm$  sont donnés par (3.1.16) et les fonctions troncatures  $\chi_0$  et  $\chi_1$  sont définies par (3.1.13). Comme dans [DKN14], on veut appliquer ce résultat aux systèmes fondamentaux de solutions  $\{S_{jn}, j = 1, 2, n = 0, 1\}$ . Cependant, on rappelle que les  $S_{jn}$  sont des solutions de l'Équation (3.2.20) et cette équation de Schrödinger a été obtenue à partir de l'équation de Helmholtz (3.2.1) par un changement de variable et l'introduction d'un poids (voir (3.2.19)). On applique ainsi le résultat précédent aux fonctions

$$u_{jn}(x^1, \mu^2, \nu^2) = \left( \frac{f_1}{s_{12}}(x^1) \right)^{\frac{1}{4}} S_{jn}(g(x^1), \mu^2, \nu^2), \quad j \in \{1, 2\}, \quad n \in \{0, 1\}. \quad (3.2.28)$$

On commence par étudier le comportement du poids aux deux bouts dans le Lemme suivant.

**Lemme 3.2.17.** *Lorsque  $x^1 \rightarrow 0$ ,*

$$\left( \frac{f_1}{s_{12}}(x^1) \right)^{\frac{1}{4}} = \sqrt{x^1} [1]_{\epsilon_0},$$

où

$$[1]_{\epsilon_0} = 1 + O((1 + |\log(x^1)|)^{-1-\epsilon_0}).$$

*Le résultat correspondant au bout  $\{x^1 = A\}$  est également vrai.*

*Démonstration.* On commence par diviser la condition de Robertson (3.1.6) par  $s_{12}$  et

on obtient que

$$\frac{f_1}{s_{12}} = \frac{\left(\frac{\det(S)}{s_{12}}\right)^2}{\frac{H_1^2}{s_{12}} H_2^2 H_3^2}.$$

On utilise les conditions d'hyperbolicité données dans (3.1.8)-(3.1.9) et la Remarque 3.1.22 pour obtenir que

$$\begin{cases} \frac{\det(S)}{s_{12}} = \frac{s^{11}}{(x^1)^2} [1]_{\epsilon_0} \\ \frac{H_1^2}{s_{12}} = \frac{1}{(x^1)^2} [1]_{\epsilon_0} \\ H_2^2 = \frac{s^{11}}{(x^1)^2} [1]_{\epsilon_0} \\ H_3^2 = \frac{s^{11}}{(x^1)^2} [1]_{\epsilon_0} \end{cases}.$$

Le Lemme est alors une conséquence directe de ces estimations.  $\square$

Grâce à (3.2.22)-(3.2.23), (3.2.28) et au Lemme 3.2.17, on obtient que lorsque  $x^1 \rightarrow 0$ ,

$$u_{10}(x^1, \mu^2, \nu^2) \sim (x^1)^{1-i\lambda} \quad \text{et} \quad u_{20}(x^1, \mu^2, \nu^2) \sim \frac{1}{2i\lambda} (x^1)^{1+i\lambda},$$

et lorsque  $x^1 \rightarrow A$ ,

$$u_{11}(x^1, \mu^2, \nu^2) \sim (A - x^1)^{1-i\lambda} \quad \text{et} \quad u_{21}(x^1, \mu^2, \nu^2) \sim -\frac{1}{2i\lambda} (A - x^1)^{1+i\lambda}. \quad (3.2.29)$$

On désigne par  $\psi^{(-)} = (\psi_0^{(-)}, \psi_1^{(-)})$  et  $\psi^{(+)} = (\psi_0^{(+)}, \psi_1^{(+)})$  les constantes apparaissant dans le Théorème 3.1.24 correspondant à  $u_{10}$ . Puisque  $u_{10} \sim (x^1)^{1-i\lambda}$  lorsque  $x^1 \rightarrow 0$ , on obtient que

$$\psi_0^{(-)} = 0 \quad \text{et} \quad \psi_0^{(+)} = -\frac{1}{\omega_+(\lambda)}.$$

On écrit à présent  $S_{10}$  comme une combinaison linéaire de  $S_{11}$  et  $S_{21}$ , i.e.

$$S_{10} = a_1(\mu_m^2, \nu_m^2) S_{11} + b_1(\mu_m^2, \nu_m^2) S_{21},$$

où

$$a_1(\mu_m^2, \nu_m^2) = W(S_{10}, S_{21}) \quad \text{et} \quad b_1(\mu_m^2, \nu_m^2) = W(S_{11}, S_{10}).$$

Ainsi, grâce à (3.2.28),

$$u_{10} = a_1(\mu_m^2, \nu_m^2) u_{11} + b_1(\mu_m^2, \nu_m^2) u_{21}.$$

### 3.2. Problème direct

On obtient alors, grâce à (3.2.29), que

$$\psi_1^{(-)} = -\frac{b_1(\mu_m^2, \nu_m^2)}{2i\lambda\omega_-(\lambda)} \quad \text{et} \quad \psi_1^{(+)} = -\frac{a_1(\mu_m^2, \nu_m^2)}{\omega_+(\lambda)}.$$

Finalement, on a montré que  $u_{10}$  satisfait la décomposition du Théorème 3.1.24 avec

$$\psi^{(-)} = \begin{pmatrix} 0 \\ -\frac{b_1(\mu_m^2, \nu_m^2)}{2i\lambda\omega_-(\lambda)} \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \psi^{(+)} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{\omega_+(\lambda)} \\ -\frac{a_1(\mu_m^2, \nu_m^2)}{\omega_+(\lambda)} \end{pmatrix}. \quad (3.2.30)$$

On suit la même procédure pour  $u_{11}$  et on obtient les vecteurs correspondants

$$\phi^{(-)} = \begin{pmatrix} \frac{b_0(\mu_m^2, \nu_m^2)}{2i\lambda\omega_-(\lambda)} \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \phi^{(+)} = \begin{pmatrix} -\frac{a_0(\mu_m^2, \nu_m^2)}{\omega_+(\lambda)} \\ -\frac{1}{\omega_+(\lambda)} \end{pmatrix}, \quad (3.2.31)$$

où  $a_0(\mu_m^2, \nu_m^2) = W(S_{11}, S_{20})$  et  $b_0(\mu_m^2, \nu_m^2) = W(S_{10}, S_{11})$ . On rappelle maintenant que pour tout  $\psi_m^{(-)} \in \mathbb{C}^2$  il existe un unique vecteur  $\psi_m^{(+)} \in \mathbb{C}^2$  et  $u_m(x)Y_m \in \mathcal{B}^*$  satisfaisant (3.2.1) pour lesquels le développement (3.1.15) est vérifié. Ceci définit la matrice de diffusion  $S_g(\lambda, \mu_m^2, \nu_m^2)$  comme étant la matrice  $2 \times 2$  telle que pour tout  $\psi_m^{(-)} \in \mathbb{C}^2$

$$\psi_m^{(+)} = S_g(\lambda, \mu_m^2, \nu_m^2) \psi_m^{(-)}. \quad (3.2.32)$$

En utilisant la notation

$$S_g(\lambda, \mu_m^2, \nu_m^2) = \begin{pmatrix} L(\lambda, \mu_m^2, \nu_m^2) & T_L(\lambda, \mu_m^2, \nu_m^2) \\ T_R(\lambda, \mu_m^2, \nu_m^2) & R(\lambda, \mu_m^2, \nu_m^2) \end{pmatrix},$$

et, en utilisant la Définition (3.2.32) de la matrice de diffusion partielle ainsi que (3.2.30)-(3.2.31), on obtient

$$S_g(\lambda, \mu_m^2, \nu_m^2) = \begin{pmatrix} -\frac{2i\lambda\omega_-(\lambda)}{\omega_+(\lambda)} \frac{a_0(\mu_m^2, \nu_m^2)}{b_0(\mu_m^2, \nu_m^2)} & \frac{2i\lambda\omega_-(\lambda)}{\omega_+(\lambda)} \frac{1}{b_1(\mu_m^2, \nu_m^2)} \\ -\frac{2i\lambda\omega_-(\lambda)}{\omega_+(\lambda)} \frac{1}{b_0(\mu_m^2, \nu_m^2)} & \frac{2i\lambda\omega_-(\lambda)}{\omega_+(\lambda)} \frac{a_1(\mu_m^2, \nu_m^2)}{b_1(\mu_m^2, \nu_m^2)} \end{pmatrix}. \quad (3.2.33)$$

Dans cette expression de la matrice de diffusion partielle, on reconnaît les coefficients de transmission  $T_L(\lambda, \mu_m^2, \nu_m^2)$  et  $T_R(\lambda, \mu_m^2, \nu_m^2)$  ainsi que les coefficients de réflexion  $L(\lambda, \mu_m^2, \nu_m^2)$  et  $R(\lambda, \mu_m^2, \nu_m^2)$  respectivement à gauche et à droite usuels. Puisqu'ils sont écrits en termes de Wronskiens des  $S_{jn}$ ,  $j = 1, 2$ ,  $n = 0, 1$ , on peut faire le lien avec la fonction caractéristique (3.2.25) et la fonction de Weyl-Titchmarsh généralisée (3.2.26)

comme suit. En notant que,

$$\Delta_{q_{\nu_m^2}}(\mu_m^2) = b_1(\mu_m^2, \nu_m^2) = -b_0(\mu_m^2, \nu_m^2) \quad \text{et} \quad M_{q_{\nu_m^2}}(\mu_m^2) = \frac{a_0(\mu_m^2, \nu_m^2)}{b_0(\mu_m^2, \nu_m^2)},$$

on obtient,

$$L(\lambda, \mu_m^2, \nu_m^2) = -\frac{2i\lambda\omega_-(\lambda)}{\omega_+(\lambda)} M_{q_{\nu_m^2}}(\mu_m^2) \quad (3.2.34)$$

et

$$T(\lambda, \mu_m^2, \nu_m^2) = T_L(\lambda, \mu_m^2, \nu_m^2) = T_R(\lambda, \mu_m^2, \nu_m^2) = \frac{2i\lambda\omega_-(\lambda)}{\omega_+(\lambda)} \frac{1}{\Delta_{q_{\nu_m^2}}(\mu_m^2)}. \quad (3.2.35)$$

Enfin, en utilisant le fait que la matrice de diffusion est unitaire (voir le Théorème 3.1.24) on obtient comme dans [DKN14] l'égalité

$$R(\lambda, \mu_m^2, \nu_m^2) = \frac{2i\lambda\omega_-(\lambda)}{\omega_+(\lambda)} \frac{\overline{\Delta_{q_{\nu_m^2}}(\mu_m^2)}}{\Delta_{q_{\nu_m^2}}(\mu_m^2)} \overline{M_{q_{\nu_m^2}}(\mu_m^2)}. \quad (3.2.36)$$

### 3.2.4 Deuxième construction des fonctions caractéristique et de Weyl-Titchmarsh

Dans la Section 3.2.2 on a défini les fonctions caractéristique et de Weyl-Titchmarsh lorsque  $-\mu_m^2$  est le paramètre spectral. On peut également définir ces fonctions lorsque l'on choisit  $-\nu_m^2$  comme paramètre spectral. On rappelle que l'équation radiale est donnée par (3.2.18). Pour choisir  $-\nu^2 := -\nu_m^2$  comme paramètre spectral on procède au changement de variable de Liouville :

$$\hat{X}^1 = \hat{g}(x^1) = \int_0^{x^1} \sqrt{s_{13}(t)} \, dt$$

et on définit

$$\hat{u}(\hat{X}^1, \mu^2, \nu^2) = u(\hat{h}(\hat{X}^1), \mu^2, \nu^2),$$

où  $\hat{h} = \hat{g}^{-1}$  et  $\mu^2 := \mu_m^2$ . Comme dans la Section 3.3.1 on introduit un poids et on définit

$$\hat{U}(\hat{X}^1, \mu^2, \nu^2) = \left( \frac{f_1}{s_{13}}(\hat{h}(\hat{X}^1)) \right)^{-\frac{1}{4}} u(\hat{h}(\hat{X}^1), \mu^2, \nu^2).$$

Après calculs, on obtient que  $\hat{U}(\hat{X}^1, \mu^2, \nu^2)$  satisfait, en la variable  $\hat{X}^1$ , l'équation de Schrödinger

$$-\ddot{U}(\hat{X}^1, \mu^2, \nu^2) + \hat{q}_{\mu^2}(\hat{X}^1, \lambda)U(\hat{X}^1, \mu^2, \nu^2) = -\nu^2 U(\hat{X}^1, \mu^2, \nu^2), \quad (3.2.37)$$

où,

$$\begin{aligned} \hat{q}_{\mu^2}(\hat{X}^1, \lambda) = & -(\lambda^2 + 1) \frac{s_{11}(\hat{X}^1)}{s_{13}(\hat{X}^1)} + \mu^2 \frac{s_{12}(\hat{X}^1)}{s_{13}(\hat{X}^1)} + \frac{1}{16} \left( \left( \log \left( \frac{\dot{f}_1(\hat{X}^1)}{s_{13}(\hat{X}^1)} \right) \right) \right)^2 \\ & - \frac{1}{4} \left( \log \left( \frac{\ddot{f}_1(\hat{X}^1)}{s_{13}(\hat{X}^1)} \right) \right). \end{aligned} \quad (3.2.38)$$

Comme dans la Section 3.2.2 on peut prouver le Lemme suivant.

**Lemme 3.2.18.** *Le potentiel  $\hat{q}_{\mu^2}$  satisfait, au bout  $\{\hat{X}^1 = 0\}$ ,*

$$\hat{q}_{\mu^2}(\hat{X}^1, \lambda) = -\frac{\lambda^2 + \frac{1}{4}}{(\hat{X}^1)^2} + \hat{q}_{0, \mu^2}(\hat{X}^1, \lambda),$$

où  $\hat{X}^1 \hat{q}_{0, \mu^2}(\hat{X}^1, \lambda) \in L^1 \left( 0, \frac{\hat{A}^1}{2} \right)$  avec  $\hat{A}^1 = \hat{g}(A)$ . De même, au bout  $\{\hat{X}^1 = \hat{A}^1\}$ ,

$$\hat{q}_{\mu^2}(\hat{X}^1, \lambda) = -\frac{\lambda^2 + \frac{1}{4}}{(\hat{A}^1 - \hat{X}^1)^2} + \hat{q}_{\hat{A}^1, \mu^2}(\hat{X}^1, \lambda),$$

où  $(\hat{A}^1 - \hat{X}^1) \hat{q}_{\hat{A}^1, \mu^2}(\hat{X}^1, \lambda) \in L^1 \left( \frac{\hat{A}^1}{2}, \hat{A}^1 \right)$ .

On peut à présent suivre la procédure de la Section 3.2.2 pour définir les fonctions caractéristique et de Weyl-Titchmarsh correspondant à l'Équation (3.2.37) en utilisant deux systèmes fondamentaux de solutions. Ainsi, on peut définir les fonctions caractéristiques

$$\hat{\Delta}_{\hat{q}_{\mu^2}}(\nu^2) = W(\hat{S}_{11}, \hat{S}_{10}) \quad \text{et} \quad \hat{\delta}_{\hat{q}_{\mu^2}}(\nu^2) = W(\hat{S}_{11}, \hat{S}_{20}) \quad (3.2.39)$$

ainsi que la fonction de Weyl-Titchmarsh

$$\hat{M}_{\hat{q}_{\mu^2}}(\nu^2) = -\frac{W(\hat{S}_{11}, \hat{S}_{20})}{W(\hat{S}_{11}, \hat{S}_{10})} = -\frac{\hat{\delta}_{\hat{q}_{\mu^2}}(\nu^2)}{\hat{\Delta}_{\hat{q}_{\mu^2}}(\nu^2)}. \quad (3.2.40)$$

Grâce au Corollaire 3.2.15 on obtient immédiatement le Lemme suivant.



**Lemme 3.2.19.**

$$\Delta_{q_{\nu_m^2}}(\mu_m^2) = \hat{\Delta}_{\hat{q}_{\mu_m^2}}(\nu_m^2) \quad \text{et} \quad M_{q_{\nu_m^2}}(\mu_m^2) = \hat{M}_{\hat{q}_{\mu_m^2}}(\nu_m^2), \quad \forall m \geq 1.$$

Comme dans la Section 3.2.2 les fonctions caractéristiques satisfont le Lemme suivant.

**Lemme 3.2.20.** *Pour tout  $\mu$  fixé les applications*

$$\nu \mapsto \hat{\Delta}_{\hat{q}_{\mu^2}}(\nu^2) = \Delta_{q_{\nu^2}}(\mu^2) \quad \text{et} \quad \nu \mapsto \hat{\delta}_{\hat{q}_{\mu^2}}(\nu^2) = \delta_{q_{\nu^2}}(\mu^2)$$

*sont entières.*

### 3.2.5 Troisième construction des fonctions caractéristique et de Weyl-Titchmarsh et application

Le but de cette Section est de montrer que, si l'on autorise les moments angulaires à être complexe, les fonctions caractéristiques  $\Delta$  et  $\delta$  sont bornées sur  $(i\mathbb{R})^2$ . Ainsi, dans cette Section  $\mu_m$  et  $\nu_m$  sont supposés appartenir à  $i\mathbb{R}$ . Dans les Sections 3.2.2 et 3.2.4 on a défini les fonctions caractéristique et de Weyl-Titchmarsh avec  $-\mu_m^2$  et  $-\nu_m^2$  comme paramètres spectraux. On fait maintenant un troisième choix de paramètre spectral. On rappelle que l'équation radiale est donnée par (3.2.18) et on la réécrit sous la forme

$$-u'' + \frac{1}{2}(\log(f_1))'u' - (\lambda^2 + 1)s_{11}u = -(\mu_m^2 + \nu_m^2) \left( \frac{\mu_m^2 s_{12} + \nu_m^2 s_{13}}{\mu_m^2 + \nu_m^2} \right) u.$$

On pose, pour  $(y, y') \in \mathbb{R}^2$ ,

$$\mu := \mu_m = iy, \quad \nu := \nu_m = iy', \quad \omega^2 := \mu^2 + \nu^2$$

et

$$r_{\mu^2, \nu^2}(x^1) := \frac{\mu^2 s_{12}(x^1) + \nu^2 s_{13}(x^1)}{\mu^2 + \nu^2}.$$

**Remarque 3.2.21.** *Il existe deux constantes positives  $c_1$  et  $c_2$  telles que pour tout  $(\mu, \nu) \in (i\mathbb{R})^2$  et  $x^1 \in (0, A)$ ,*

$$0 < c_1 \leq r_{\mu^2, \nu^2}(x^1) \leq c_2 < +\infty.$$

Pour choisir  $-\omega^2$  comme paramètre spectral on procède à un changement de variable de

Liouville (qui dépend de  $\mu^2$  et  $\nu^2$  et est une sorte de moyenne des deux précédents) :

$$\check{X}_{\mu^2, \nu^2}^1 = \check{g}_{\mu^2, \nu^2}(x^1) = \int_0^{x^1} \sqrt{r_{\mu^2, \nu^2}(t)} dt.$$

Dans un soucis de simplicité, on pose

$$\check{X}^1 := \check{X}_{\mu^2, \nu^2}^1 \quad \text{et} \quad \check{g}(x^1) := \check{g}_{\mu^2, \nu^2}(x^1).$$

On définit

$$\check{u}(\check{X}^1, \mu^2, \nu^2) = u(\check{h}(\check{X}^1), \mu^2, \nu^2),$$

où  $\check{h} = \check{g}^{-1}$ . Comme dans la Section 3.3.1, on introduit un poids et on définit

$$\check{U}(\check{X}^1, \mu^2, \nu^2) = \left( \frac{f_1}{r_{\mu^2, \nu^2}}(\check{h}(\check{X}^1)) \right)^{-\frac{1}{4}} u(\check{h}(\check{X}^1), \mu^2, \nu^2).$$

Après calculs, on obtient que  $\check{U}(\check{X}^1, \mu^2, \nu^2)$  satisfait, en la variable  $\check{X}^1$ , l'équation de Schrödinger

$$-\check{\ddot{U}}(\check{X}^1, \mu^2, \nu^2) + \check{q}_{\mu^2, \nu^2}(\check{X}^1, \lambda) \check{U}(\check{X}^1, \mu^2, \nu^2) = -\omega^2 \check{U}(\check{X}^1, \mu^2, \nu^2), \quad (3.2.41)$$

où,

$$\begin{aligned} \check{q}_{\mu^2, \nu^2}(\check{X}^1, \lambda) = & -(\lambda^2 + 1) \frac{s_{11}(\check{X}^1)}{r_{\mu^2, \nu^2}(\check{X}^1)} + \frac{1}{16} \left( \left( \log \left( \frac{f_1(\check{X}^1)}{r_{\mu^2, \nu^2}(\check{X}^1)} \right) \right) \right)^2 \\ & - \frac{1}{4} \left( \log \left( \frac{f_1(\check{X}^1)}{r_{\mu^2, \nu^2}(\check{X}^1)} \right) \right). \end{aligned} \quad (3.2.42)$$

**Lemme 3.2.22.** *Le potentiel  $\check{q}_{\mu^2, \nu^2}$  satisfait, au bout  $\{\check{X}^1 = 0\}$ ,*

$$\check{q}_{\mu^2, \nu^2}(\check{X}^1, \lambda) = -\frac{\lambda^2 + \frac{1}{4}}{(\check{X}^1)^2} + \check{q}_{0, \mu^2, \nu^2}(\check{X}^1, \lambda),$$

où  $\check{X}^1 \check{q}_{0, \mu^2, \nu^2}(\check{X}^1, \lambda) \in L^1\left(0, \frac{\check{A}^1}{2}\right)$  avec  $\check{A}^1 = \check{g}(A)$  et  $\check{q}_{0, \mu^2, \nu^2}$  est uniformément borné pour  $(\mu, \nu) \in (i\mathbb{R})^2$ . De même, au bout  $\{\check{X}^1 = \check{A}^1\}$ ,

$$\check{q}_{\mu^2, \nu^2}(\check{X}^1, \lambda) = -\frac{\lambda^2 + \frac{1}{4}}{(\check{A}^1 - \check{X}^1)^2} + \check{q}_{\check{A}^1, \mu^2, \nu^2}(\check{X}^1, \lambda),$$

où  $(\check{A}^1 - \check{X}^1)\check{q}_{\check{A}^1, \mu^2, \nu^2}(\check{X}^1, \lambda) \in L^1\left(\frac{\check{A}^1}{2}, \check{A}^1\right)$  avec  $\check{A}^1 = \check{g}(A)$  et  $\check{q}_{\check{A}^1, \mu^2, \nu^2}$  est uniformément borné pour  $(\mu, \nu) \in (i\mathbb{R})^2$ .

**Remarque 3.2.23.** Grâce à la Remarque 3.2.21, on obtient immédiatement qu'il existe deux constantes positives  $A^-$  et  $A^+$  telles que pour tout  $(\mu, \nu) \in (i\mathbb{R})^2$ ,

$$A^- \leq \check{A}^1 =: \check{A}_{\mu^2, \nu^2}^1 \leq A^+.$$

Un fois de plus on suit la procédure de la Section 3.2.2 pour définir les fonctions caractéristique et de Weyl-Titchmarsh correspondant à l'Équation (3.2.41) en utilisant deux systèmes fondamentaux de solutions  $\{\check{S}_{j0}\}_{j=1,2}$  et  $\{\check{S}_{j1}\}_{j=1,2}$  satisfaisant les asymptotiques (3.2.22)-(3.2.23). Ainsi, on définit la fonction caractéristique

$$\check{\Delta}_{\check{q}_{\mu^2, \nu^2}}(\omega^2) = W(\check{S}_{11}, \check{S}_{10}), \quad (3.2.43)$$

et la fonction de Weyl-Titchmarsh

$$\check{M}_{\check{q}_{\mu^2, \nu^2}}(\omega^2) = -\frac{W(\check{S}_{11}, \check{S}_{20})}{W(\check{S}_{11}, \check{S}_{10})} =: -\frac{\check{\delta}_{\check{q}_{\mu^2, \nu^2}}(\omega^2)}{\check{\Delta}_{\check{q}_{\mu^2, \nu^2}}(\omega^2)}. \quad (3.2.44)$$

Comme dans la Section 3.2.4, Lemme 3.2.19, on peut utiliser le Corollaire 3.2.15 pour prouver le Lemme suivant.

**Lemme 3.2.24.**

$$\Delta_{q_{\nu^2}}(\mu^2) = \check{\Delta}_{\check{q}_{\mu^2, \nu^2}}(\omega^2) \quad \text{et} \quad M_{q_{\nu^2}}(\mu^2) = \check{M}_{\check{q}_{\mu^2, \nu^2}}(\omega^2), \quad \forall (\mu, \nu) \in (i\mathbb{R})^2.$$

On achève cette Section en suivant la preuve de la Proposition 3.2 de [DKN14] et en prouvant la Proposition suivante.

**Proposition 3.2.25.** Pour  $\omega = iy$ , où  $\pm y \geq 0$ , lorsque  $|\omega| \rightarrow \infty$ ,

$$\begin{aligned} \check{\Delta}_{\check{q}_{\mu^2, \nu^2}}(\omega^2) &= \frac{\Gamma(1-i\lambda)^2}{\pi 2^{2i\lambda}} \omega^{2i\lambda} e^{\pm \lambda \pi} 2 \cosh\left(\omega \check{A}^1 \mp \lambda \pi\right) [1]_\epsilon, \\ \check{\delta}_{\check{q}_{\mu^2, \nu^2}}(\omega^2) &= \frac{\Gamma(1-i\lambda)\Gamma(1+i\lambda)}{2i\lambda\pi} 2 \cosh\left(\omega \check{A}^1\right) [1]_\epsilon, \\ \check{M}_{\check{q}_{\mu^2, \nu^2}}(\omega^2) &= -\frac{\Gamma(1+i\lambda)^2 e^{\mp \lambda \pi} 2^{2i\lambda}}{2i\lambda\Gamma(1-i\lambda)} \omega^{-2i\lambda} \frac{\cosh\left(\omega \check{A}^1\right)}{\cosh\left(\omega \check{A}^1 \mp \lambda \pi\right)} [1]_\epsilon, \end{aligned}$$

où  $[1]_\epsilon = O\left(\frac{1}{(\log|\omega|)^\epsilon}\right)$  lorsque  $|\omega| \rightarrow \infty$  avec  $\epsilon = \min(\epsilon_0, \epsilon_1)$ .

*Démonstration.* La seule différence avec la Proposition 3.2 de [DKN14] réside dans le fait que le potentiel  $q_{\mu^2, \nu^2}$  dépend des moments angulaires  $\mu^2$  et  $\nu^2$ . Cependant, puisque  $\check{q}_{0, \mu^2, \nu^2}$  est uniformément borné pour  $(\mu, \nu) \in (i\mathbb{R})^2$ , on obtient la Proposition 3.2.25 sans complications supplémentaires.  $\square$

**Corollaire 3.2.26.** *Il existe  $C > 0$  telle que pour tout  $(\mu, \nu) \in (i\mathbb{R})^2$ ,*

$$|\Delta_{q_{\nu^2}}(\mu^2)| = |\check{\Delta}_{\check{q}_{\mu^2, \nu^2}}(\omega^2)| \leq C$$

et

$$|\delta_{q_{\nu^2}}(\mu^2)| = |\check{\delta}_{\check{q}_{\mu^2, \nu^2}}(\omega^2)| \leq C.$$

*Démonstration.* Ce Corollaire est une conséquence immédiate de la Proposition 3.2.25, de la Remarque 3.2.23 et de la définition de  $\omega^2 = \mu^2 + \nu^2 \leq 0$  lorsque  $(\mu, \nu) \in (i\mathbb{R})^2$ .  $\square$

### 3.3 Problème inverse à énergie fixée pour les équations angulaires

Le but de cette Section est de montrer l'unicité de la partie angulaire de la matrice de Stäckel i.e. des deuxième et troisième lignes. On commence par prouver que le bloc

$$\begin{pmatrix} s_{22} & s_{23} \\ s_{32} & s_{33} \end{pmatrix}$$

est déterminé de façon unique par la connaissance de la matrice de diffusion à une énergie fixée en utilisant le fait que les matrices de diffusion agissent sur le même espace et la première invariance décrite dans la Proposition 3.1.16. Dans un second temps, on utilise la décomposition sur les harmoniques généralisées et la seconde invariance de la Proposition 3.1.16 pour prouver l'unicité des coefficients  $s_{21}$  et  $s_{31}$ . On montre finalement l'unicité du spectre joint qui sera utile dans notre étude de la partie radiale.

#### 3.3.1 Première réduction et premier résultat d'unicité

On commence par rappeler que (voir (3.1.10)),

$$g = \frac{(dx^1)^2 + d\Omega_{\mathcal{T}^2}^2 + P(x^1, x^2, x^3, dx^1, dx^2, dx^3)}{(x^1)^2}$$

et

$$\tilde{g} = \frac{(dx^1)^2 + d\tilde{\Omega}_{\mathcal{T}^2}^2 + \tilde{P}(x^1, x^2, x^3, dx^1, dx^2, dx^3)}{(x^1)^2}.$$

Notre hypothèse principale est

$$S_g(\lambda) = S_{\tilde{g}}(\lambda),$$

en tant qu'opérateurs agissant sur  $L^2(\mathcal{T}^2, dVol_{d\Omega_{\mathcal{T}^2}}; \mathbb{C}^2)$  avec

$$dVol_{d\Omega_{\mathcal{T}^2}} = \sqrt{\det(d\Omega_{\mathcal{T}^2}^2)}.$$

Ainsi,

$$\sqrt{\det(d\Omega_{\mathcal{T}^2}^2)} = \sqrt{\det(d\tilde{\Omega}_{\mathcal{T}^2}^2)},$$

puisque ces opérateurs doivent agir sur le même espace. Puisque,

$$d\Omega_{\mathcal{T}^2}^2 = s^{11}((dx^2)^2 + (dx^3)^2) \quad \text{et} \quad d\tilde{\Omega}_{\mathcal{T}^2}^2 = \tilde{s}^{11}((dx^2)^2 + (dx^3)^2),$$

cette égalité implique que

$$s^{11} = \tilde{s}^{11}. \tag{3.3.1}$$

En utilisant la Remarque 3.1.22, on peut obtenir plus d'informations à partir de cette égalité. En effet, on commence par noter que,

$$\begin{aligned} s^{11} &= s_{22}s_{33} - s_{23}s_{32} \\ &= s_{22}s_{33} - (1 + s_{22})(1 + s_{33}) \\ &= -1 - s_{22} - s_{33}. \end{aligned}$$

Ainsi, l'égalité (3.3.1), nous permet d'obtenir

$$s_{22} - \tilde{s}_{22} = \tilde{s}_{33} - s_{33}.$$

Puisque le côté de gauche ne dépend que de la variable  $x^2$  et que le côté de droite ne dépend que de la variable  $x^3$ , on déduit de cette égalité qu'il existe une constante  $c \in \mathbb{R}$  telle que

$$s_{22} - \tilde{s}_{22} = c = \tilde{s}_{33} - s_{33}.$$

En utilisant à nouveau la Remarque 3.1.22, on peut ainsi écrire

$$\begin{pmatrix} s_{22} & s_{23} \\ s_{32} & s_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \tilde{s}_{22} & \tilde{s}_{23} \\ \tilde{s}_{32} & \tilde{s}_{33} \end{pmatrix} + c \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix},$$

ou de façon équivalente,

$$\begin{pmatrix} s_{22} & s_{23} \\ s_{32} & s_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \tilde{s}_{22} & \tilde{s}_{23} \\ \tilde{s}_{32} & \tilde{s}_{33} \end{pmatrix} G,$$

où

$$G = \begin{pmatrix} 1-c & -c \\ c & 1+c \end{pmatrix},$$

est une matrice constante de déterminant 1. De plus, comme ceci a été mentionné dans la Proposition 3.1.16, si  $\hat{S}$  est une seconde matrice de Stäckel telle que

$$\begin{pmatrix} s_{i2} & s_{i3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \hat{s}_{i2} & \hat{s}_{i3} \end{pmatrix} G, \quad \forall i \in \{1, 2, 3\},$$

alors

$$g = \hat{g},$$

puisque

$$s^{i1} = \hat{s}^{i1}, \quad \forall i \in \{1, 2, 3\}.$$

La présence de la matrice  $G$  est donc due à une invariance de la métrique  $g$ . On peut ainsi supposer que  $G = I_2$ . On conclut donc que

$$\begin{pmatrix} s_{22} & s_{23} \\ s_{32} & s_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \tilde{s}_{22} & \tilde{s}_{23} \\ \tilde{s}_{32} & \tilde{s}_{33} \end{pmatrix}. \quad (3.3.2)$$

### 3.3.2 Fin du problème inverse pour la partie angulaire

Le but de cette Section est de montrer l'unicité des coefficients  $s_{21}$  et  $s_{31}$ . Tout d'abord, puisque  $\{\tilde{Y}_m\}_{m \geq 1}$  est une base hilbertienne de  $L^2(\mathcal{T}^2, s^{11} dx^2 dx^3)$ , on sait que, pour tout  $m \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ , il existe un sous-ensemble  $E_m \subset \mathbb{N} \setminus \{0\}$  tel que

$$Y_m = \sum_{p \in E_m} c_p \tilde{Y}_p.$$

On rappelle que, grâce à (3.2.4),

$$\begin{pmatrix} H \\ L \end{pmatrix} = \frac{1}{s^{11}} \begin{pmatrix} s_{32} & -s_{22} \\ -s_{33} & s_{23} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A_2 \\ A_3 \end{pmatrix},$$

où les  $A_j$ ,  $j \in \{2, 3\}$ , ont été définis dans (3.2.3). Il est clair que,

$$\begin{pmatrix} A_2 \\ A_3 \end{pmatrix} = T \begin{pmatrix} H \\ L \end{pmatrix}, \quad (3.3.3)$$

où

$$T = - \begin{pmatrix} s_{23} & s_{22} \\ s_{33} & s_{32} \end{pmatrix}.$$

On rappelle que

$$\tilde{T} = - \begin{pmatrix} \tilde{s}_{23} & \tilde{s}_{22} \\ \tilde{s}_{33} & \tilde{s}_{32} \end{pmatrix} = T.$$

On déduit finalement de (3.3.3) que

$$- \begin{pmatrix} \partial_2^2 \\ \partial_3^2 \end{pmatrix} = T \begin{pmatrix} H \\ L \end{pmatrix} + (\lambda^2 + 1) \begin{pmatrix} s_{21} \\ s_{31} \end{pmatrix}$$

et on obtient alors que

$$T \begin{pmatrix} H \\ L \end{pmatrix} + (\lambda^2 + 1) \begin{pmatrix} s_{21} \\ s_{31} \end{pmatrix} = T \begin{pmatrix} \tilde{H} \\ \tilde{L} \end{pmatrix} + (\lambda^2 + 1) \begin{pmatrix} \tilde{s}_{21} \\ \tilde{s}_{31} \end{pmatrix}. \quad (3.3.4)$$

**Lemme 3.3.1.** *Pour tout  $m \geq 1$ ,*

$$\tilde{H} \left( \sum_{p \in E_m} c_p \tilde{Y}_p \right) = \sum_{p \in E_m} c_p \tilde{H}(\tilde{Y}_p) \quad \text{et} \quad \tilde{L} \left( \sum_{p \in E_m} c_p \tilde{Y}_p \right) = \sum_{p \in E_m} c_p \tilde{L}(\tilde{Y}_p).$$

*Démonstration.* On rappelle que  $\tilde{H}$  est autoadjoint. Ainsi l'opérateur  $(\tilde{H} + i)^{-1}$  est borné. De même, l'opérateur  $(\tilde{H} + i)^{-1} \tilde{H}$  est également borné. Ainsi,

$$\begin{aligned} (\tilde{H} + i)^{-1} \tilde{H} \left( \sum_{p \in E_m} c_p \tilde{Y}_p \right) &= \sum_{p \in E_m} c_p (\tilde{H} + i)^{-1} \tilde{H}(\tilde{Y}_p) \\ &= (\tilde{H} + i)^{-1} \left( \sum_{p \in E_m} c_p \tilde{H}(\tilde{Y}_p) \right). \end{aligned}$$

En multipliant par  $(\tilde{H} + i)$  à gauche on obtient le résultat de notre Lemme. On note que la somme  $\sum_{p \in E_m} c_p \tilde{H}(\tilde{Y}_p)$  est finie car les coefficients  $c_p$  sont suffisamment décroissants. En effet, on note que  $c_p = \langle Y_m, \tilde{Y}_p \rangle$  et on peut utiliser des intégrations par partie à l'aide de l'opérateur  $H$  et la loi de Weyl sur les valeurs propres pour obtenir la décroissance

voulue. □

**Remarque 3.3.2.** Si les  $E_m$ ,  $m \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ , sont finis alors le Lemme 3.3.1 est évident. En réalité, en suivant l'idée de [DKN14] Proposition 4.1, on peut montrer que ces ensembles sont finis en utilisant les asymptotiques de la fonction de Weyl-Titchmarsh.

En appliquant (3.3.4) au vecteur d'harmoniques généralisées

$$\begin{pmatrix} Y_m \\ Y_m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sum_{p \in E_m} c_p \tilde{Y}_p \\ \sum_{p \in E_m} c_p \tilde{Y}_p \end{pmatrix}$$

on obtient, grâce au Lemme 3.3.1 et à (3.2.9), que

$$\begin{aligned} \left( T \begin{pmatrix} H \\ L \end{pmatrix} + (\lambda^2 + 1) \begin{pmatrix} s_{21} \\ s_{31} \end{pmatrix} \right) \begin{pmatrix} Y_m \\ Y_m \end{pmatrix} &= \left( T \begin{pmatrix} \mu_m^2 \\ \nu_m^2 \end{pmatrix} + (\lambda^2 + 1) \begin{pmatrix} s_{21} \\ s_{31} \end{pmatrix} \right) \begin{pmatrix} Y_m \\ Y_m \end{pmatrix} \\ &= \sum_{p \in E_m} c_p \left( T \begin{pmatrix} \mu_m^2 \\ \nu_m^2 \end{pmatrix} + (\lambda^2 + 1) \begin{pmatrix} s_{21} \\ s_{31} \end{pmatrix} \right) \begin{pmatrix} \tilde{Y}_p \\ \tilde{Y}_p \end{pmatrix} \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} \left( T \begin{pmatrix} H \\ L \end{pmatrix} + (\lambda^2 + 1) \begin{pmatrix} s_{21} \\ s_{31} \end{pmatrix} \right) \begin{pmatrix} Y_m \\ Y_m \end{pmatrix} &= \sum_{p \in E_m} c_p \left( T \begin{pmatrix} \tilde{H} \\ \tilde{L} \end{pmatrix} + (\lambda^2 + 1) \begin{pmatrix} \tilde{s}_{21} \\ \tilde{s}_{31} \end{pmatrix} \right) \begin{pmatrix} \tilde{Y}_p \\ \tilde{Y}_p \end{pmatrix} \\ &= \sum_{p \in E_m} c_p \left( T \begin{pmatrix} \tilde{\mu}_p^2 \\ \tilde{\nu}_p^2 \end{pmatrix} + (\lambda^2 + 1) \begin{pmatrix} \tilde{s}_{21} \\ \tilde{s}_{31} \end{pmatrix} \right) \begin{pmatrix} \tilde{Y}_p \\ \tilde{Y}_p \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Ainsi,

$$\begin{aligned} &\sum_{p \in E_m} c_p \left( T \begin{pmatrix} \mu_m^2 \\ \nu_m^2 \end{pmatrix} + (\lambda^2 + 1) \begin{pmatrix} s_{21} \\ s_{31} \end{pmatrix} \right) \begin{pmatrix} \tilde{Y}_p \\ \tilde{Y}_p \end{pmatrix} \\ &= \sum_{p \in E_m} c_p \left( T \begin{pmatrix} \tilde{\mu}_p^2 \\ \tilde{\nu}_p^2 \end{pmatrix} + (\lambda^2 + 1) \begin{pmatrix} \tilde{s}_{21} \\ \tilde{s}_{31} \end{pmatrix} \right) \begin{pmatrix} \tilde{Y}_p \\ \tilde{Y}_p \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Puisque  $\{\tilde{Y}_p\}_{p \geq 1}$  est une base hilbertienne on déduit de cette égalité que pour tout  $m \geq 1$ , pour tout  $p \in E_m$ ,

$$T \begin{pmatrix} \mu_m^2 \\ \nu_m^2 \end{pmatrix} + (\lambda^2 + 1) \begin{pmatrix} s_{21} \\ s_{31} \end{pmatrix} = T \begin{pmatrix} \tilde{\mu}_p^2 \\ \tilde{\nu}_p^2 \end{pmatrix} + (\lambda^2 + 1) \begin{pmatrix} \tilde{s}_{21} \\ \tilde{s}_{31} \end{pmatrix}. \quad (3.3.5)$$



On déduit de (3.3.5) que

$$\begin{pmatrix} \tilde{\mu}_p^2 - \mu_m^2 \\ \tilde{\nu}_p^2 - \nu_m^2 \end{pmatrix} = (\lambda^2 + 1)T^{-1} \begin{pmatrix} s_{21} - \tilde{s}_{21} \\ s_{31} - \tilde{s}_{31} \end{pmatrix}.$$

Puisque le côté de droite est indépendant de  $m$  et  $p$ , on peut déduire de cette égalité qu'il existe un vecteur constant

$$\begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix},$$

tel que

$$\begin{pmatrix} \tilde{\mu}_p^2 \\ \tilde{\nu}_p^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mu_m^2 \\ \nu_m^2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix},$$

et

$$\begin{pmatrix} s_{21} \\ s_{31} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \tilde{s}_{21} \\ \tilde{s}_{31} \end{pmatrix} + \frac{1}{\lambda^2 + 1}T \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix}. \quad (3.3.6)$$

De (3.3.6), on déduit immédiatement que

$$\begin{cases} s_{21}(x^2) = \tilde{s}_{21}(x^2) - C_1 s_{23}(x^2) - C_2 s_{22}(x^2) \\ s_{31}(x^3) = \tilde{s}_{31}(x^3) - C_1 s_{33}(x^3) - C_2 s_{32}(x^3) \end{cases}, \quad (3.3.7)$$

où  $C_i = \frac{c_i}{\lambda^2 + 1}$  pour  $i \in \{1, 2\}$ . On rappelle que

$$g = \sum_{i=1}^3 H_i^2 (dx^i)^2 \quad \text{avec} \quad H_i^2 = \frac{\det(S)}{s_{i1}} \quad \forall i \in \{1, 2, 3\}.$$

Puisque les mineurs  $s^{i1}$  dépendent uniquement de la seconde et la troisième colonnes, ils ne changent pas sous la transformation décrite par (3.3.7). Ainsi, comme mentionné dans l'Introduction, Proposition 3.1.16, les égalités (3.3.7) décrivent une invariance de la métrique  $g$  par rapport à la définition de la matrice de Stäckel  $S$ . On peut donc choisir  $C_i = 0$ ,  $i \in \{1, 2\}$ , i.e.  $c_1 = c_2 = 0$ . Finalement, on a montré que

$$\begin{pmatrix} s_{21} \\ s_{31} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \tilde{s}_{21} \\ \tilde{s}_{31} \end{pmatrix}. \quad (3.3.8)$$

De la définition des opérateurs  $L$  et  $H$  donnée par (3.2.4), on déduit de (3.3.2) et (3.3.8) que

$$H = \tilde{H} \quad \text{et} \quad L = \tilde{L}.$$

Ces opérateurs ont donc les même fonctions propres, i.e. que l'on peut choisir

$$Y_m = \tilde{Y}_m, \quad \forall m \geq 1, \quad (3.3.9)$$

et le même spectre joint

$$\begin{pmatrix} \mu_m^2 \\ \nu_m^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \tilde{\mu}_m^2 \\ \tilde{\nu}_m^2 \end{pmatrix}, \quad \forall m \geq 1. \quad (3.3.10)$$

### 3.4 Problème inverse à énergie fixée pour l'équation radiale

Le but de cette Section est de montrer que la partie radiale de la matrice de Stäckel, i.e. la première ligne est déterminée de façon unique par la connaissance de la matrice de diffusion à une énergie fixée. On commence par utiliser une version multivariable de la méthode de Complexification du Moment Angulaire pour étendre l'égalité des fonctions de Weyl-Titchmarsh (valide sur le spectre couplé) aux moments angulaires complexes. Dans un second temps on utilise le Théorème de Borg-Marchenko (voir par exemple [FY05, KST12]) pour obtenir l'unicité des quotients

$$\frac{s_{11}}{s_{12}} \quad \text{et} \quad \frac{s_{11}}{s_{13}}.$$

#### 3.4.1 Complexification des moments angulaires

On rappelle que, grâce à notre hypothèse dans le Théorème 3.1.25, (3.3.9)-(3.3.10) et (3.2.34), on sait que,

$$M(\mu_m^2, \nu_m^2) = \tilde{M}(\mu_m^2, \nu_m^2), \quad \forall m \geq 1, \quad (3.4.1)$$

où

$$M(\mu_m^2, \nu_m^2) = M_{q_{\nu_m^2}}(\mu_m^2) = M_{\hat{q}_{\mu_m^2}}(\nu_m^2)$$

et

$$\tilde{M}(\mu_m^2, \nu_m^2) = M_{\tilde{q}_{\nu_m^2}}(\mu_m^2) = M_{\tilde{\hat{q}}_{\mu_m^2}}(\nu_m^2).$$

Le but de cette Section est de montrer que

$$M(\mu^2, \nu^2) = \tilde{M}(\mu^2, \nu^2), \quad \forall (\mu, \nu) \in \mathbb{C}^2 \setminus P, \quad (3.4.2)$$

où  $P$  est l'ensemble des points  $(\mu, \nu) \in \mathbb{C}^2$  tel que  $(\mu^2, \nu^2)$  soit un pôle de  $M$  et  $\tilde{M}$ , ou de façon équivalente un zéro de  $\Delta$  et  $\tilde{\Delta}$ . De façon usuelle, dans la méthode de Complexification

du Moment Angulaire il n'y a qu'un moment angulaire que l'on complexifie. Dans [DKN15], il y a deux moments angulaires *indépendants* et les auteurs peuvent utiliser une méthode de Complexification du Moment Angulaire pour seulement un moment angulaire. Ici, on ne peut pas fixer un moment angulaire et laisser l'autre parcourir  $\mathbb{C}$  car ils ne sont pas indépendants (voir le Lemme 3.2.9). On doit ainsi complexifier les deux moments angulaires simultanément et on a donc besoin d'utiliser des résultats d'unicité pour des fonctions holomorphes de plusieurs variables. Ainsi, pour obtenir (3.4.2) on va utiliser le résultat suivant donné dans [Ber78, Blo90].

**Théoreme 3.4.1.** *Soit  $K$  un cône ouvert dans  $\mathbb{R}^2$  ayant pour sommet l'origine et  $T(K) = \{z \in \mathbb{C}^2, \operatorname{Re}(z) \in K\}$ . Supposons que  $f$  est une fonction bornée et analytique sur  $T(K)$ . Soit  $E$  un sous-ensemble discret de  $K$  tel qu'il existe une constante  $h > 0$  tel que  $|e_1 - e_2| \geq h$ , pour tout  $(e_1, e_2) \in E$ . Soit  $n(r) = \#E \cap B(0, r)$ . Supposons que  $f$  s'annule sur  $E$ . Alors  $f$  est identiquement nulle si*

$$\overline{\lim} \frac{n(r)}{r^2} > 0, \quad r \rightarrow +\infty.$$

On commence par introduire la fonction

$$\begin{aligned} \psi : \quad \mathbb{C}^2 &\rightarrow \mathbb{C} \\ (\mu, \nu) &\mapsto \tilde{\Delta}(\mu^2, \nu^2) \delta(\mu^2, \nu^2) - \Delta(\mu^2, \nu^2) \tilde{\delta}(\mu^2, \nu^2) \end{aligned}$$

avec,

$$\delta(\mu^2, \nu^2) = \delta_{q_{\nu^2}}(\mu^2) = \delta_{\hat{q}_{\mu^2}}(\nu^2),$$

où  $\delta_{q_{\nu^2}}(\mu^2)$  et  $\delta_{\hat{q}_{\mu^2}}(\nu^2)$  ont été définies dans (3.2.25) et

$$\Delta(\mu^2, \nu^2) = \Delta_{q_{\nu^2}}(\mu^2) = \Delta_{\hat{q}_{\mu^2}}(\nu^2),$$

où  $\Delta_{q_{\nu^2}}(\mu^2)$  et  $\Delta_{\hat{q}_{\mu^2}}(\nu^2)$  ont été définies dans (3.2.39). Notre objectif est donc de montrer que  $\psi$  est identiquement nulle.

**Lemme 3.4.2.** *L'application  $\psi$  est entière comme une fonction de deux variables complexes.*

*Démonstration.* On utilise le Théorème de Hartogs (voir par exemple [Hor73]) qui énonce qu'une fonction de deux variables complexes est holomorphe si et seulement si elle est holomorphe par rapport à chacune des variables séparément. En effet, grâce aux Lemmes 3.2.13 et 3.2.20, on peut alors conclure immédiatement.  $\square$

Pour utiliser le Théorème 3.4.1 on a besoin des estimations suivantes sur la fonction  $\psi$ .

**Lemme 3.4.3.** *Il existe des constantes positives  $C$ ,  $A$  et  $B$  telles que*

$$|\psi(\mu, \nu)| \leq C e^{A|\operatorname{Re}(\mu)| + B|\operatorname{Re}(\nu)|}, \quad \forall (\mu, \nu) \in \mathbb{C}^2.$$

*Démonstration.* La preuve du Lemme consiste en quatre étapes.

Étape 1 : On montre que pour tout  $\nu \in \mathbb{C}$  fixé il existe une constante  $C_1(\nu)$  telle que pour tout  $\mu \in \mathbb{C}$

$$|\psi(\mu, \nu)| \leq C_1(\nu) e^{A|\operatorname{Re}(\mu)|}.$$

Pour obtenir cette estimation on étudie les solutions  $S_{j0}$  et  $S_{j1}$  définies dans la Section 3.2.2. Pour commencer, on montre que pour tout  $j \in \{1, 2\}$ ,

$$\begin{aligned} |S_{j0}(X^1, \mu^2, \nu^2)| &\leq C(\nu) \frac{e^{|\operatorname{Re}(\mu)|X^1}}{|\mu|^{\frac{1}{2}}}, \\ |S'_{j0}(X^1, \mu^2, \nu^2)| &\leq C(\nu) |\mu|^{\frac{1}{2}} e^{|\operatorname{Re}(\mu)|X^1}, \\ |S_{j1}(X^1, \mu^2, \nu^2)| &\leq C(\nu) \frac{e^{|\operatorname{Re}(\mu)|(A^1 - X^1)}}{|\mu|^{\frac{1}{2}}}, \\ |S'_{j1}(X^1, \mu^2, \nu^2)| &\leq C(\nu) |\mu|^{\frac{1}{2}} e^{|\operatorname{Re}(\mu)|(A^1 - X^1)}. \end{aligned}$$

Comme dans [DKN14], on peut montrer par récurrence que

$$|S_{j0}(X^1, \mu^2, \nu^2)| \leq C \left( \frac{X^1}{1 + |\mu|X^1} \right)^{\frac{1}{2}} e^{|\operatorname{Re}(\mu)|X^1} \exp \left( \int_0^{X^1} \frac{t|q_{0,\nu^2}(t)|}{1 + |\mu|t} dt \right). \quad (3.4.3)$$

On rappelle maintenant que, grâce à la structure asymptotiquement hyperbolique, on a pour tout  $X^1 \in (0, X_0^1)$ , où  $X_0^1 \in (0, A^1)$  est fixé,

$$t|q_{0,\nu^2}(t)| \leq \frac{C(1 + \nu^2)}{t(1 + |\log(t)|)^{1+\epsilon_0}}, \quad \forall t \in (0, X).$$

Ainsi, comme cela est montré dans la Section 3.1 de [DKN14],

$$\int_0^{X^1} \frac{t|q_{0,\nu^2}(t)|}{1 + |\mu|t} dt \leq (1 + \nu^2) O \left( \frac{1}{(\log(|\mu|))^{\epsilon_0}} \right). \quad (3.4.4)$$

On peut alors conclure que

$$|S_{j0}(X^1, \mu^2, \nu^2)| \leq C(\nu) \frac{e^{|\operatorname{Re}(\mu)|X^1}}{|\mu|^{\frac{1}{2}}}.$$

Le résultat sur  $S'_{j0}(X^1, \mu^2, \nu^2)$  est obtenu de façon similaire en utilisant l'estimation sur la dérivée du noyau de Green donnée dans la Proposition 3.1 de [DKN14]. Par symétrie, on obtient également les estimations correspondantes sur  $S_{j1}(X^1, \mu^2, \nu^2)$  et  $S'_{j1}(X^1, \mu^2, \nu^2)$ . On peut alors conclure que

$$\Delta(\mu^2, \nu^2) = \Delta_{q_{\nu^2}}(\mu^2) = W(S_{11}, S_{10})$$

et

$$\delta(\mu^2, \nu^2) = \delta_{q_{\nu^2}}(\mu^2) = W(S_{11}, S_{20}),$$

satisfont

$$|\Delta(\mu^2, \nu^2)| \leq C_1(\nu) e^{A|\operatorname{Re}(\mu)|} \quad \text{et} \quad |\delta(\mu^2, \nu^2)| \leq C_1(\nu) e^{A|\operatorname{Re}(\mu)|}, \quad \forall (\mu, \nu) \in \mathbb{C}^2.$$

Finalement, on a montré que

$$|\psi(\mu, \nu)| \leq C_1(\nu) e^{A|\operatorname{Re}(\mu)|}, \quad \forall (\mu, \nu) \in \mathbb{C}^2.$$

Étape 2 : On peut également montrer que pour tout  $\mu \in \mathbb{C}$  fixé il existe une constante  $C_2(\mu)$  telle que pour tout  $\nu \in \mathbb{C}$

$$|\psi(\mu, \nu)| \leq C_2(\mu) e^{\hat{A}|\operatorname{Re}(\nu)|}.$$

Pour obtenir cette estimation on utilise la stratégie de la première étape sur l'Équation (3.2.37) avec le potentiel (3.2.38) introduit dans le Section 3.2.4.

Étape 3 : Grâce au Corollaire 3.2.26, il existe une constante  $C$  telle que pour tout  $(y, y') \in \mathbb{R}^2$ ,

$$|\psi(iy, iy')| \leq C. \tag{3.4.5}$$

Étape 4 : On achève la preuve du Lemme par l'utilisation du Théorème de Phragmén-Lindelöf (voir [Boa54] Theorem 1.4.3). On commence par fixer  $\nu \in i\mathbb{R}$ . Alors, l'application  $\mu \mapsto \psi(\mu, \nu)$  satisfait

$$\begin{cases} |\psi(\mu, \nu)| \leq C_1(\nu)e^{A|\operatorname{Re}(\mu)|}, & \forall \mu \in \mathbb{C}, & (\text{Étape 1}) \\ |\psi(\mu, \nu)| \leq C, & \forall \mu \in i\mathbb{R}, & (\text{Étape 3}) \end{cases}.$$

Grâce au Théorème de Phragmén-Lindelöf, on déduit de ces égalités que

$$|\psi(\mu, \nu)| \leq Ce^{A|\operatorname{Re}(\mu)|}, \quad \forall (\mu, \nu) \in \mathbb{C} \times i\mathbb{R}.$$

On fixe à présent  $\mu \in \mathbb{C}$ , alors l'application  $\nu \mapsto \psi(\mu, \nu)$  satisfait

$$\begin{cases} |\psi(\mu, \nu)| \leq C_2(\mu)e^{B|\operatorname{Re}(\nu)|}, & \forall \nu \in \mathbb{C}, & (\text{Étape 1}) \\ |\psi(\mu, \nu)| \leq Ce^{A|\operatorname{Re}(\mu)|}, & \forall \nu \in i\mathbb{R} \end{cases}.$$

Ainsi, en utilisant le Théorème de Phragmén-Lindelöf, on obtient

$$|\psi(\mu, \nu)| \leq Ce^{A|\operatorname{Re}(\mu)|+B|\operatorname{Re}(\nu)|}, \quad \forall (\mu, \nu) \in \mathbb{C}^2.$$

□

On applique le Théorème 3.4.1 avec

$$K = (\mathbb{R}^+)^2 \quad \text{et} \quad F(\mu, \nu) = \psi(\mu, \nu)e^{-A\mu-B\nu}.$$

**Lemme 3.4.4.** *L'application  $F$  est bornée et holomorphe sur*

$$T((\mathbb{R}^+)^2) = \{(\mu, \nu) \in \mathbb{C}^2, (\operatorname{Re}(\mu), \operatorname{Re}(\nu)) \in \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+\}.$$

*Démonstration.* Ce Lemme est une conséquence immédiate des Lemmes 3.4.2 et 3.4.3. □

On rappelle à présent que  $(\mu_m^2, \nu_m^2)$ ,  $m \geq 1$ , désigne le spectre joint des opérateurs  $H$  et  $L$ . On note que  $\mu_m^2$  et  $\nu_m^2$  tendent vers  $+\infty$ , lorsque  $m \rightarrow +\infty$ . Ainsi, il existe  $M \geq 1$  tel que  $\mu_m^2 \geq 0$  et  $\nu_m^2 \geq 0$  pour tout  $m \geq M$ . On pose alors

$$E_M = \{(|\mu_m|, |\nu_m|), m \geq M\}.$$

Grâce l'Équation (3.4.1), on note que l'application  $F$  satisfait

$$F(\mu_m, \nu_m) = 0, \quad \forall m \geq M,$$

puisque

$$\psi(\mu_m, \nu_m) = 0, \quad \forall m \geq M. \quad (3.4.6)$$

De plus, puisque les fonctions caractéristiques sont, par définition, paires par rapport à  $\mu$  et  $\nu$ , on obtient que

$$F(|\mu_m|, |\nu_m|) = F(\mu_m, \nu_m) = 0, \quad \forall m \geq M,$$

i.e. que  $F$  s'annule sur  $E_M$ .

**Remarque 3.4.5.** *On insiste sur le fait que  $E_M$  désigne l'ensemble des valeurs propres comptées avec multiplicité (qui est au plus 4). Puisque l'on a besoin d'une propriété de séparation donnée dans le Lemme suivant pour pouvoir appliquer le Théorème de Bloom, on doit en réalité considérer un nouvel ensemble, également noté  $E_M$ , qui correspond à l'ensemble précédent des valeurs propres mais cette fois comptées sans multiplicité. Pour obtenir cette propriété de séparation sur le spectre nous devons également restreindre notre analyse à un cône bien choisi donné dans le Lemme suivant.*

**Lemme 3.4.6.** *On pose*

$$\mathcal{C} = \{(\mu^2, \theta^2 \mu^2), \quad c_1 + \epsilon \leq \theta^2 \leq c_2 - \epsilon\}, \quad 0 < \epsilon < 1, \quad (3.4.7)$$

où

$$c_1 = \max \left( -\frac{s_{32}}{s_{33}} \right) \quad \text{et} \quad c_2 = \min \left( -\frac{s_{22}}{s_{23}} \right).$$

Alors, il existe  $h > 0$  tel que  $|e_1 - e_2| \geq h$  pour tout  $(e_1, e_2) \in (E_M \cap \mathcal{C})^2$ ,  $e_1 \neq e_2$ .

*Démonstration.* Voir Section 3.6.2. □

**Remarque 3.4.7.** *On note que, comme nous l'avons montré dans le Lemme 3.2.9, on sait qu'il existe des constantes réelles  $C_1$ ,  $C_2$ ,  $D_1$  et  $D_2$  telles que pour tout  $m \geq 1$ ,*

$$C_1 \mu_m^2 + D_1 \leq \nu_m^2 \leq C_2 \mu_m^2 + D_2,$$

où

$$C_1 = \min \left( -\frac{s_{32}}{s_{33}} \right) > 0 \quad \text{et} \quad C_2 = -\min \left( \frac{s_{22}}{s_{23}} \right) > 0.$$

On obtient alors facilement que

$$0 < C_1 \leq c_1 < c_2 \leq C_2.$$

**Lemme 3.4.8.** *On pose*

$$n(r) = \#E_M \cap B(0, r) \cap \mathcal{C},$$

où  $\mathcal{C}$  a été défini dans (3.4.7), alors

$$\overline{\lim} \frac{n(r)}{r^2} > 0, \quad r \rightarrow +\infty.$$

*Démonstration.* Voir Section 3.6.3. □

**Remarque 3.4.9.** *On insiste sur le fait que le nombre de points du spectre couplé  $n(r)$  que l'on utilise pour appliquer le Théorème de Bloom n'est pas exactement celui que l'on calcule dans le cadre de Colin de Verdière. En effet, Colin de Verdière calcule le nombre de points du spectre couplé en comptant la multiplicité alors que  $n(r)$  désigne le nombre de points du spectre couplé sans compter la multiplicité. Cependant, comme nous l'avons déjà vu (voir la Remarque 3.2.7) la multiplicité des valeurs propres couplées est au plus 4. Ainsi,  $n(r)$  est supérieur ou égal au quart du nombre calculé dans les travaux de Colin de Verdière et est ainsi toujours d'ordre  $r^2$ .*

On peut alors utiliser le Théorème 3.4.1 pour conclure que

$$F(\mu, \nu) = 0, \quad \forall (\mu, \nu) \in \mathbb{C}^2.$$

De cette égalité on déduit immédiatement que

$$M(\mu^2, \nu^2) = \tilde{M}(\mu^2, \nu^2), \quad \forall (\mu, \nu) \in \mathbb{C}^2 \setminus P,$$

où  $P$  est l'ensemble des points  $(\mu, \nu) \in \mathbb{C}^2$  tels que  $(\mu^2, \nu^2)$  est un zéro des fonctions caractéristiques  $\Delta$  et  $\tilde{\Delta}$ .

### 3.4.2 Problème inverse pour la partie radiale

À l'aide d'une version multivariable de la méthode de Complexification du Moment Angulaire on a montré que

$$M(\mu^2, \nu^2) = \tilde{M}(\mu^2, \nu^2), \quad \forall (\mu, \nu) \in \mathbb{C}^2 \setminus P,$$

où  $P$  est l'ensemble des points  $(\mu, \nu) \in \mathbb{C}^2$  tels que  $(\mu^2, \nu^2)$  est un zéro de la fonction caractéristique  $\Delta$ . Par définition, ceci veut dire que

$$M_{q,2}(\mu^2) = \tilde{M}_{\tilde{q},2}(\mu^2), \quad \forall (\mu, \nu) \in \mathbb{C}^2 \setminus P,$$



où  $M_{q_{\nu^2}}(\mu^2)$  est définie dans (3.2.26). On peut ainsi utiliser le célèbre Théorème de Borg-Marchenko sous sa forme donnée dans [DKN14, FY05] et rappelée dans l'Introduction (voir (3.1.21)-(3.1.22)) pour obtenir que

$$q_{\nu^2_m}(X^1, \lambda) = \tilde{q}_{\nu^2_m}(X^1, \lambda), \quad \forall m \geq 1, \quad \forall X^1 \in (0, A^1).$$

Grâce à (3.2.21), et puisque l'égalité précédente est vraie pour tout  $m \geq 1$ , on a alors, pour tout  $X^1 \in (0, A^1)$ ,

$$\frac{s_{13}(X^1)}{s_{12}(X^1)} = \frac{\tilde{s}_{13}(X^1)}{\tilde{s}_{12}(X^1)} \quad (3.4.8)$$

et

$$\begin{aligned} & -(\lambda^2 + 1) \frac{s_{11}(X^1)}{s_{12}(X^1)} + \frac{1}{16} \left( \left( \log \left( \frac{\dot{f}_1(X^1)}{s_{12}(X^1)} \right) \right) \right)^2 - \frac{1}{4} \left( \log \left( \frac{\ddot{f}_1(X^1)}{s_{12}(X^1)} \right) \right) \\ & = -(\lambda^2 + 1) \frac{\tilde{s}_{11}(X^1)}{\tilde{s}_{12}(X^1)} + \frac{1}{16} \left( \left( \log \left( \frac{\dot{\tilde{f}}_1(X^1)}{\tilde{s}_{12}(X^1)} \right) \right) \right)^2 - \frac{1}{4} \left( \log \left( \frac{\ddot{\tilde{f}}_1(X^1)}{\tilde{s}_{12}(X^1)} \right) \right). \end{aligned} \quad (3.4.9)$$

On souhaite réécrire cette équation sous forme d'un problème de Cauchy pour une équation différentielle non-linéaire du second ordre avec des conditions de bord au bout  $\{X^1 = 0\}$ . Pour ce faire, on pose

$$f = \frac{s_{11}}{s_{12}}, \quad h = \frac{s_{12}}{f_1}, \quad l = \frac{s_{13}}{s_{12}} = \tilde{l} \quad \text{et} \quad u = \left( \frac{h}{\tilde{h}} \right)^{\frac{1}{4}}.$$

On peut alors réécrire (3.4.9) sous la forme

$$u'' + \frac{1}{2}(\log(\tilde{h}))' u' + (\lambda^2 + 1)(\tilde{f} - f)u = 0. \quad (3.4.10)$$

En utilisant la condition de Robertson (3.1.6), on peut écrire

$$\frac{s_{11}}{s_{12}} = f = -\frac{s_{12}}{s_{11}} - l \frac{s_{13}}{s_{11}} + h(ls_{32} - s_{33})(s_{23} - ls_{22}). \quad (3.4.11)$$

**Remarque 3.4.10.** Grâce à (3.4.11), on voit que l'on peut écrire  $\frac{s_{11}}{s_{12}}$  comme une fonction de  $\frac{s_{13}}{s_{12}}$  et  $\frac{f_1}{s_{12}}$ , i.e.

$$\frac{s_{11}}{s_{12}} = \Phi \left( \frac{s_{13}}{s_{12}}, \frac{f_1}{s_{12}} \right) \quad \text{et} \quad \frac{\tilde{s}_{11}}{\tilde{s}_{12}} = \Phi \left( \frac{s_{13}}{s_{12}}, \frac{\tilde{f}_1}{\tilde{s}_{12}} \right), \quad (3.4.12)$$

où

$$\Phi(X, Y) = -\frac{s^{12}}{s^{11}} - X \frac{s^{13}}{s^{11}} + \frac{1}{Y} (X s_{32} - s_{33})(s_{23} - X s_{22}).$$

Ainsi, pour montrer que

$$\frac{s_{11}}{s_{12}} = \frac{\tilde{s}_{11}}{\tilde{s}_{12}},$$

il est suffisant d'après (3.4.8) de montrer que

$$\frac{f_1}{s_{12}} = \frac{\tilde{f}_1}{\tilde{s}_{12}}.$$

De (3.4.11) on déduit que

$$\begin{aligned} f - \tilde{f} &= (h - \tilde{h})(l s_{32} - s_{33})(s_{23} - l s_{22}) \\ &= \tilde{h}(u^4 - 1)(l s_{32} - s_{33})(s_{23} - l s_{22}). \end{aligned}$$

Finalement, en utilisant cette dernière égalité, on peut réécrire (3.4.10) sous la forme

$$u'' + \frac{1}{2}(\log(\tilde{h}))'u' + (\lambda^2 + 1)\tilde{h}(l s_{32} - s_{33})(s_{23} - l s_{22})(u^5 - u) = 0. \quad (3.4.13)$$

**Lemme 3.4.11.** *La fonction  $u$  définie par*

$$u = \left( \frac{h}{\tilde{h}} \right)^{\frac{1}{4}},$$

*satisfait*

$$u(0) = 1 \quad \text{et} \quad u'(0) = 0.$$

*Démonstration.* Il s'agit d'une conséquence du fait que la structure asymptotiquement hyperbolique donnée par le troisième point de la Définition 3.1.9 est la même sur les deux variétés.  $\square$

On étudie ainsi le problème de Cauchy

$$\begin{cases} u'' + \frac{1}{2}(\log(\tilde{h}))'u' + (\lambda^2 + 1)\tilde{h}(l s_{32} - s_{33})(s_{23} - l s_{22})(u^5 - u) = 0 \\ u(0) = 1 \quad \text{et} \quad u'(0) = 0 \end{cases}. \quad (3.4.14)$$

On note immédiatement que  $u = 1$  est une solution de (3.4.14). Par unicité du problème

de Cauchy pour l'EDO (3.4.14) on conclut donc que  $u = 1$ . On a donc montré que

$$\frac{f_1}{s_{12}} = \frac{\tilde{f}_1}{\tilde{s}_{12}}$$

et, en utilisant (3.4.8) et (3.4.12), on peut conclure que

$$\frac{s_{11}}{s_{12}} = \frac{\tilde{s}_{11}}{\tilde{s}_{12}} \quad \text{et} \quad \frac{s_{11}}{s_{13}} = \frac{\tilde{s}_{11}}{\tilde{s}_{13}}. \quad (3.4.15)$$

### 3.5 Résolution du problème inverse

On peut maintenant achever la résolution de notre problème inverse. On commence par noter que

$$g = \sum_{i=1}^3 H_i^2 (dx^i)^2 = \psi^* g',$$

où

$$g' = \frac{H_1^2}{s_{12}} (dX^1)^2 + H_2^2 (dx^2)^2 + H_3^2 (dx^3)^2,$$

où  $\psi$  est le difféomorphisme correspondant au changement de variable de Liouville en la première variable

$$X^1 = \int_0^{x^1} \sqrt{s_{12}(s)} \, ds.$$

De même,

$$\tilde{g} = \sum_{i=1}^3 \tilde{H}_i^2 (dx^i)^2 = \tilde{\psi}^* \tilde{g}',$$

où

$$\tilde{g}' = \frac{\tilde{H}_1^2}{\tilde{s}_{12}} (d\tilde{X}^1)^2 + \tilde{H}_2^2 (dx^2)^2 + \tilde{H}_3^2 (dx^3)^2,$$

où  $\tilde{\psi}$  est le difféomorphisme correspondant au même changement de variable de Liouville en la première variable pour la seconde variété. On remarque que, grâce au Théorème de Borg-Marchenko, on peut identifier

$$A^1 = \tilde{A}^1.$$

On note maintenant que, grâce à (3.4.15),

$$\frac{H_1^2}{s_{12}} = \frac{\det(S)}{s_{12}s^{11}} = \frac{s_{11}}{s_{12}} + \frac{s^{12}}{s^{11}} + \frac{s_{13}}{s_{12}} \frac{s^{13}}{s^{11}} = \frac{\tilde{H}_1^2}{\tilde{s}_{12}},$$

$$H_2^2 = \frac{\det(S)}{s^{21}} = \frac{\frac{s_{11}}{s_{12}}s^{11} + s^{12} + \frac{s_{13}}{s_{12}}s^{13}}{\frac{s_{13}}{s_{12}}s_{32} - s_{33}} = \tilde{H}_2^2$$

et

$$H_3^2 = \frac{\det(S)}{s^{31}} = \frac{\frac{s_{11}}{s_{12}}s^{11} + s^{12} + \frac{s_{13}}{s_{12}}s^{13}}{s_{23} - \frac{s_{13}}{s_{12}}s_{22}} = \tilde{H}_3^2.$$

On peut alors déduire de ces égalités que

$$g' = \tilde{g}'.$$

Finalement, on a montré qu'il existe un difféomorphisme  $\Psi := \psi^{-1}\tilde{\psi}$  tel que

$$\tilde{g} = \Psi^*g,$$

où  $\Psi$  est l'identité aux deux bouts (car  $A^1 = \tilde{A}^1$ ).

## 3.6 Appendices

### 3.6.1 Preuve de la Proposition 3.1.17

Le but de cette Section est de prouver la Proposition 3.1.17 que l'on rappelle ici.

**Proposition 3.6.1.** *Soit  $S$  une matrice de Stäckel ayant pour métrique  $g_S$ . Alors il existe une matrice de Stäckel  $\hat{S}$  telle que  $g_{\hat{S}} = g_S$  et*

$$\left\{ \begin{array}{ll} \hat{s}_{12}(x^1) > 0 & \text{et } \hat{s}_{13}(x^1) > 0, \quad \forall x^1 \\ \hat{s}_{22}(x^2) < 0 & \text{et } \hat{s}_{23}(x^2) > 0, \quad \forall x^2 \\ \hat{s}_{32}(x^3) > 0 & \text{et } \hat{s}_{33}(x^3) < 0, \quad \forall x^3 \\ \lim_{x^1 \rightarrow 0} s_{12}(x^1) = \lim_{x^1 \rightarrow 0} s_{13}(x^1) = 1 \end{array} \right. . \quad (\text{C})$$

*Démonstration.* La preuve de cette Proposition consiste en trois étapes et utilise la structure riemannienne et les invariances de la métrique décrites dans la Proposition 3.1.16. On commence par montrer que les coefficients des deuxième et troisième colonnes sont supérieurs ou égaux à 0 ou inférieurs ou égaux à 0. Dans un second temps, on montre que l'on peut supposer que ces coefficients sont strictement positifs ou strictement négatifs. Enfin, on montre que l'on peut trouver une matrice de Stäckel ayant la même métrique associée et satisfaisant la condition (C).

  tape 1 : On montre que, pour tout  $(i, j) \in \{1, 2, 3\} \times \{2, 3\}$ ,  $s_{ij} \geq 0$  ou  $s_{ij} \leq 0$ . Puisque

la preuve est similaire pour la troisième colonne on donne simplement la preuve pour la deuxième. Pour commencer, si l'une des fonctions  $s_{12}$ ,  $s_{22}$  et  $s_{32}$  est identiquement nulle les deux autres ne peuvent pas s'annuler sur leur intervalles de définition car les mineurs  $s^{11}$ ,  $s^{21}$  et  $s^{31}$  ne peuvent pas s'annuler. Ainsi, dans ce cas on obtient immédiatement que  $s_{i2} \geq 0$  ou  $s_{i2} \leq 0$  pour tout  $i \in \{1, 2, 3\}$ . On peut ainsi supposer qu'il existe un triplet  $(x_0^1, x_0^2, x_0^3)$  tel que  $s_{12}(x_0^1) \neq 0$ ,  $s_{22}(x_0^2) \neq 0$  et  $s_{32}(x_0^3) \neq 0$ . Sans perte de généralité, on suppose que  $\det(S) > 0$  et  $s^{i1} > 0$  pour tout  $i \in \{1, 2, 3\}$ . De la positivité des mineurs on peut déduire que, selon le signe des quantités  $s_{12}(x_0^1)$ ,  $s_{22}(x_0^2)$  et  $s_{32}(x_0^3)$ , on a :

- Si  $s_{12}(x_0^1) > 0$ ,  $s_{22}(x_0^2) > 0$  et  $s_{32}(x_0^3) > 0$  : Ce cas n'est pas possible puisque les mineurs  $s^{11}$ ,  $s^{21}$  et  $s^{31}$  ne peuvent pas être tous positifs.
- Si  $s_{12}(x_0^1) > 0$ ,  $s_{22}(x_0^2) < 0$  et  $s_{32}(x_0^3) > 0$  :

$$\frac{s_{33}(x_0^3)}{s_{32}(x_0^3)} < \frac{s_{23}(x_0^2)}{s_{22}(x_0^2)} < \frac{s_{13}(x_0^1)}{s_{12}(x_0^1)}. \quad (3.6.1)$$

- Si  $s_{12}(x_0^1) > 0$ ,  $s_{22}(x_0^2) > 0$  et  $s_{32}(x_0^3) < 0$  :

$$\frac{s_{13}(x_0^1)}{s_{12}(x_0^1)} < \frac{s_{33}(x_0^3)}{s_{32}(x_0^3)} < \frac{s_{23}(x_0^2)}{s_{22}(x_0^2)}. \quad (3.6.2)$$

- Si  $s_{12}(x_0^1) > 0$ ,  $s_{22}(x_0^2) < 0$  et  $s_{32}(x_0^3) > 0$  :

$$\frac{s_{23}(x_0^2)}{s_{22}(x_0^2)} < \frac{s_{13}(x_0^1)}{s_{12}(x_0^1)} < \frac{s_{33}(x_0^3)}{s_{32}(x_0^3)}. \quad (3.6.3)$$

Puisque les quatre cas correspondant à  $s_{12}(x_0^1) < 0$  sont similaires, on traite seulement les quatre cas précédents. Supposons, par exemple, qu'il existe  $\alpha_0^2$  tel que  $s_{22}(\alpha_0^2) = 0$ . On veut montrer que  $s_{22}$  ne change pas de signe. On désigne par  $I$  l'intervalle maximal (potentiellement réduit à  $\alpha_0^2$ ) contenant  $\alpha_0^2$  tel que  $s_{22}(x^2) = 0$  pour tout  $x^2 \in I$ . Puisque les mineurs  $s^{11}$  et  $s^{31}$  ne s'annulent pas, les fonctions  $s_{12}$  et  $s_{32}$  ne peuvent pas s'annuler. Ainsi, il existe deux constantes réelles  $c_1$  et  $c_2$  telles que

$$c_1 \leq \frac{s_{13}}{s_{12}} \leq c_2 \quad \text{et} \quad c_1 \leq \frac{s_{33}}{s_{32}} \leq c_2, \quad (3.6.4)$$

i.e. que ces quotients sont bornés. De plus,  $s_{23}(x^2) \neq 0$  pour tout  $x^2 \in I$  et par continuité il existe donc un intervalle  $J$  tel que  $I \subsetneq J$  et  $s_{23}(x^2) \neq 0$  pour tout  $x^2 \in J$ . Si on suppose que  $s_{22}$  change de signe dans un voisinage de  $I$  on obtient que pour tout  $\epsilon > 0$  il existe

$y_0^2 \in J$  et  $y_1^2 \in J$  tel que

$$0 < s_{22}(y_0^2) < \epsilon \quad \text{et} \quad -\epsilon < s_{22}(y_1^2) < 0.$$

Ainsi, pour tout  $M > 0$  il existe  $y_0^2 \in J$  et  $y_1^2 \in J$  tels que

$$\frac{s_{23}(y_0^2)}{s_{22}(y_0^2)} > M \quad \text{et} \quad \frac{s_{23}(y_1^2)}{s_{22}(y_1^2)} < -M.$$

On obtient donc une contradiction entre (3.6.4) et chacune des égalités (3.6.1), (3.6.2) et (3.6.3). On peut alors conclure que  $s_{22}(x^2) \geq 0$  ou  $s_{22}(x^2) \leq 0$ . La preuve est la même pour  $s_{12}$  et  $s_{32}$ .

Étape 2 : On montre, grâce à la première invariance donnée dans la Proposition 3.1.16, qu'il existe une matrice de Stäckel ayant la même métrique associée que  $S$  et telle que pour tout  $(i, j) \in \{1, 2, 3\} \times \{2, 3\}$ ,  $s_{ij} > 0$  ou  $s_{ij} < 0$ . On rappelle qu'il y a au plus une fonction  $s_{ij}$ ,  $(i, j) \in \{1, 2, 3\} \times \{2, 3\}$ , qui s'annule par colonne puisque les mineurs  $s^{11}$ ,  $s^{21}$  et  $s^{31}$  sont des quantités ne s'annulant pas. On suppose qu'un des coefficients de la deuxième colonne s'annule. Par symétrie, on peut supposer qu'il s'agit de  $s_{12}$ , i.e. que  $s_{12}(x_0^1) = 0$  en un point  $x_0^1$ . On commence par supposer que  $s_{23}$  et  $s_{33}$  ne s'annulent pas. Dans ce cas, il existe un réel  $a \geq 1$  tel que

$$|s_{23}| < a|s_{22}| \quad \text{et} \quad |s_{33}| < a|s_{32}|$$

et un réel  $b \geq 1$  tel que

$$|s_{22}| < b|s_{23}| \quad \text{et} \quad |s_{32}| < b|s_{33}|.$$

On cherche à présent une matrice inversible constante  $2 \times 2$ ,  $G$ , telle que les coefficients de la nouvelle matrice de Stäckel obtenue par la transformation donnée dans le premier point de la Proposition 3.1.16, soient strictement positifs ou négatifs. Par exemple, si  $s_{12}$  et  $s_{13}$  ont le même signe, on pose

$$G = \begin{pmatrix} a & 1 \\ 1 & b \end{pmatrix}$$

et on obtient alors une nouvelle matrice de Stäckel dont les deuxième et troisième colonnes sont

$$\begin{pmatrix} as_{12} + s_{13} & s_{12} + bs_{13} \\ as_{22} + s_{23} & s_{22} + bs_{23} \\ as_{32} + s_{33} & s_{32} + bs_{33} \end{pmatrix}.$$

On peut facilement montrer que ces six composantes sont strictement positives ou négatives (on rappelle que  $s_{12}$  et  $s_{13}$  ne peuvent pas s'annuler simultanément). En revanche, si  $s_{12}$  et  $s_{13}$  ont des signes différents, on pose

$$G = \begin{pmatrix} a & -1 \\ -1 & b \end{pmatrix}$$

et on obtient ainsi des composantes strictement positives ou négatives. Si  $s_{23}$  ou  $s_{33}$  s'annule on doit simplement choisir des constantes  $a$  et  $b$  adaptées en utilisant le fait qu'il y a au plus une fonction s'annulant dans la troisième colonne.

Étape 3 : Finalement, on montre, grâce à la première invariance décrite dans la Proposition 3.1.16 et la structure riemannienne, qu'il existe une matrice de Stäckel ayant la même métrique associée que  $S$  et satisfaisant la condition (C). On rappelle que grâce à la deuxième étape on peut supposer que la matrice de Stäckel  $S$  satisfait  $s_{ij} > 0$  ou  $s_{ij} < 0$  pour tout  $(i, j) \in \{1, 2, 3\} \times \{2, 3\}$ . On rappelle également que la métrique  $g$  est riemannienne si et seulement si  $\det(S)$ ,  $s^{11}$ ,  $s^{21}$  et  $s^{31}$  ont le même signe. Sans perte de généralité, on suppose que toutes ces quantités sont positives. On rappelle que selon le signe des fonctions  $s_{12}$ ,  $s_{22}$  et  $s_{32}$  les inégalités (3.6.1)-(3.6.3) sont satisfaites. On commence par obtenir les conditions de signe de (C). Puisque la preuve est similaire dans les autres cas, on la donne seulement dans le cas

$$s_{12} > 0, \quad s_{22} < 0 \quad \text{et} \quad s_{32} > 0.$$

On donne alors, dans chaque cas, la matrice  $G \in GL_2(\mathbb{R})$  telle que la transformation donnée dans la première invariance de la Proposition 3.1.16 nous fournisse les signes voulus.

- Si  $s_{13} > 0$ ,  $s_{23} < 0$  et  $s_{33} > 0$  : On pose

$$G = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & b \end{pmatrix},$$

où

$$\frac{s_{13}}{s_{12}} < b < \frac{s_{23}}{s_{22}} < \frac{s_{33}}{s_{32}},$$

et on obtient les signes voulus. En effet, les deuxième et troisième colonnes de la

nouvelle matrice de Stäckel sont données par

$$\begin{pmatrix} s_{12} & -s_{12} + bs_{13} \\ s_{22} & -s_{22} + bs_{23} \\ s_{32} & -s_{32} + bs_{33} \end{pmatrix}$$

et les coefficients ont les signes voulus grâce à notre choix de la constante  $b$ .

- Si  $s_{13} > 0$ ,  $s_{23} > 0$  et  $s_{33} < 0$  : On pose  $G = I_2$ .
- Si  $s_{13} > 0$ ,  $s_{23} < 0$  et  $s_{33} < 0$  : On pose

$$G = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & b \end{pmatrix},$$

où

$$\frac{s_{33}}{s_{32}} < \frac{s_{13}}{s_{12}} < b < \frac{s_{23}}{s_{22}}.$$

Comme précédemment, le cas  $s_{13} < 0$  est similaire et on omet donc sa preuve. À ce stade de la preuve on a montré que l'on peut supposer que

$$\begin{cases} s_{12}(x^1) > 0 & \text{et} & s_{13}(x^1) > 0, & \forall x^1 \\ s_{22}(x^2) < 0 & \text{et} & s_{23}(x^2) > 0, & \forall x^2 \\ s_{32}(x^3) > 0 & \text{et} & s_{33}(x^3) < 0, & \forall x^3 \end{cases} \quad (3.6.5)$$

Finalement, on utilise juste une fois de plus l'invariance par rapport à la multiplication des deuxième et troisième colonnes par une matrice constante inversible  $2 \times 2$ ,  $G$ , pour obtenir que l'on peut supposer que

$$\lim_{x^1 \rightarrow 0} s_{12}(x^1) = \lim_{x^1 \rightarrow 0} s_{13}(x^1) = 1.$$

En effet, on a simplement à choisir

$$G = \begin{pmatrix} \frac{1}{\alpha} & 0 \\ 0 & \frac{1}{\beta} \end{pmatrix},$$

où,

$$\alpha = \lim_{x^1 \rightarrow 0} s_{12}(x^1) > 0 \quad \text{et} \quad \beta = \lim_{x^1 \rightarrow 0} s_{13}(x^1) > 0.$$

Le résultat suit alors. □



### 3.6.2 Preuve du Lemme 3.4.6

Le but de cette Section est de démontrer le Lemme 3.4.6 que l'on rappelle ici.

**Lemme 3.6.2.** *On pose*

$$E_M = \{(|\mu_m|, |\nu_m|), m \geq M\}$$

et

$$\mathcal{C} = \{(\mu^2, \theta^2 \mu^2), \quad c_1 + \epsilon \leq \theta^2 \leq c_2 + \epsilon\}, \quad 0 < \epsilon \ll 1,$$

où

$$c_1 = \max \left( -\frac{s_{32}}{s_{33}} \right) \quad \text{et} \quad c_2 = \min \left( -\frac{s_{22}}{s_{23}} \right).$$

Alors, il existe  $h > 0$  tel que  $|e_1 - e_2| \geq h$  pour tout  $(e_1, e_2) \in (E_M \cap \mathcal{C})^2$ ,  $e_1 \neq e_2$ .

*Démonstration.* On rappelle que le spectre couplé a été défini dans la Remarque 3.2.6 par

$$HY_m = \mu_m^2 Y_m \quad \text{et} \quad LY_m = \nu_m^2 Y_m, \quad \forall m \geq 1, \quad (3.6.6)$$

où  $H$  et  $L$  sont des opérateurs autoadjoints et elliptiques d'ordre deux qui commutent. En écrivant  $Y_m(x^2, x^3) = v_m(x^2)w_m(x^3)$ , on obtient que (3.6.6) est équivalent à

$$-v_m''(x^2) + \left[ -(\lambda^2 + 1)s_{21}(x^2) + \mu_m^2 s_{22}(x^2) + \nu_m^2 s_{23}(x^2) \right] v_m(x^2) = 0, \quad (3.6.7)$$

et

$$-w_m''(x^3) + \left[ -(\lambda^2 + 1)s_{31}(x^3) + \mu_m^2 s_{32}(x^3) + \nu_m^2 s_{33}(x^3) \right] w_m(x^3) = 0, \quad (3.6.8)$$

où  $v_m$  et  $w_m$  sont des fonctions périodiques, i.e.

$$\begin{cases} v_m(0) = v_m(B) & \text{et} & v_m'(0) = v_m'(B) \\ w_m(0) = w_m(C) & \text{et} & w_m'(0) = w_m'(C) \end{cases}. \quad (3.6.9)$$

On commence par considérer l'Équation (3.6.7) qui peut être réécrite sous la forme

$$-v'' - (\lambda^2 + 1)s_{21}v = \mu^2 \left[ -s_{22} - \theta^2 s_{23} \right] v,$$

où  $v := v_m$ ,  $\mu^2 := \mu_m^2$ ,  $\nu^2 := \nu_m^2$  et

$$\theta^2 := \frac{\nu^2}{\mu^2}.$$

Par la suite nous allons considérer des équations de Schrödinger associés aux Équations (3.6.7)-(3.6.8) où le paramètre spectral qui est  $\mu^2$  tend vers  $+\infty$ . De plus, ces équations dépendent du paramètre  $\theta^2$  qui lui reste borné dans un cône adapté que l'on introduit maintenant. On rappelle que, comme nous l'avons montré dans le Lemme 3.2.9, il existe des constantes réelles  $C_1, C_2, D_1$  et  $D_2$  telles que pour tout  $m \geq 1$ ,

$$C_1\mu_m^2 + D_1 \leq \nu_m^2 \leq C_2\mu_m^2 + D_2,$$

où

$$C_1 = \min\left(-\frac{s_{32}}{s_{33}}\right) > 0 \quad \text{et} \quad C_2 = -\min\left(\frac{s_{22}}{s_{23}}\right) > 0.$$

Soit  $\epsilon > 0$  fixé, on considère alors  $\theta^2$  tel que

$$c_1 + \frac{D_1}{\mu^2} + \epsilon \leq \theta^2 \leq c_2 + \frac{D_2}{\mu^2} - \epsilon, \quad (3.6.10)$$

où

$$c_1 = \max\left(-\frac{s_{32}}{s_{33}}\right) \quad \text{et} \quad c_2 = \min\left(-\frac{s_{22}}{s_{23}}\right).$$

On note que

$$0 < C_1 \leq c_1 < c_2 \leq C_2.$$

Ceci implique que, pour  $\mu^2$  suffisamment grand, il existe  $\delta > 0$  tel que

$$-s_{22} - \theta^2 s_{23} \geq \left(\epsilon - \frac{D_2}{\mu^2}\right) s_{23} \geq \delta > 0 \quad (3.6.11)$$

et

$$-s_{32} - \theta^2 s_{33} \geq \left(\epsilon + \frac{D_1}{\mu^2}\right) (-s_{33}) \geq \delta > 0. \quad (3.6.12)$$

Pour de tels que  $\theta^2$ , on peut procéder à un changement de variable de Liouville

$$X^2 = \int_0^{x^2} \sqrt{-s_{22}(t) - \theta^2 s_{23}(t)} dt,$$

dans l'Équation (3.6.7). Cette nouvelle variable satisfait  $X^2 \in [0, \tilde{B}(\theta^2)]$ , où

$$\tilde{B}(\theta^2) = \int_0^B \sqrt{-s_{22}(t) - \theta^2 s_{23}(t)} dt. \quad (3.6.13)$$

Enfin, on pose

$$V(X^2) = \left[ -s_{22}(x^2(X^2)) - \theta^2 s_{23}(x^2(X^2)) \right]^{\frac{1}{4}} v(x^2(X^2)).$$

Cette nouvelle fonction satisfait alors, en la variable  $X^2$ , l'équation de Schrödinger

$$-\ddot{V}(X^2) + Q_{\theta^2}(X^2)V(X^2) = \mu^2 V(X^2), \quad (3.6.14)$$

où  $\mu^2$  joue le rôle du paramètre spectral,  $Q_{\theta^2}(X^2)$  est uniformément borné par rapport aux  $\theta^2$  satisfaisant (3.6.10) et pour de tels  $\theta^2$ ,

$$Q_{\theta^2}(X^2) = O(1).$$

On cherche à présent les couples  $(\mu^2, \theta^2)$  tels que (3.6.14) admette des solutions périodiques. On définit les systèmes fondamentaux de solutions usuels  $\{C_0, S_0\}$  et  $\{C_1, S_1\}$  de (3.6.14), i.e.

$$C_0(0) = 1, \quad \dot{C}_0(0) = 0, \quad S_0(0) = 0 \quad \text{et} \quad \dot{S}_0(0) = 1,$$

et

$$C_1(\tilde{B}) = 1, \quad \dot{C}_1(\tilde{B}) = 0, \quad S_1(\tilde{B}) = 0 \quad \text{et} \quad \dot{S}_1(\tilde{B}) = 1.$$

On rappelle que ces fonctions sont analytiques et paires par rapport à  $\mu$ . On écrit les solutions  $V$  de (3.6.14) sous la forme

$$V = \alpha C_0 + \beta S_0 = \gamma C_1 + \delta S_1,$$

où  $\alpha, \beta, \gamma$  et  $\delta$  sont des constantes réelles. Ainsi,

$$V(0) = \alpha, \quad \dot{V}(0) = 0, \quad V(\tilde{B}) = \gamma \quad \text{et} \quad \dot{V}(\tilde{B}) = \delta.$$

$V$  est donc une fonction périodique si et seulement si

$$V(0) = V(\tilde{B}) \quad \Leftrightarrow \quad \alpha = \gamma \quad \Leftrightarrow \quad W(V, S_0) = W(V, S_1)$$

et

$$\dot{V}(0) = \dot{V}(\tilde{B}) \quad \Leftrightarrow \quad \beta = \delta \quad \Leftrightarrow \quad W(C_0, V) = W(C_1, V),$$

où  $W(f, g) = fg' - f'g$  désigne le Wronskien des deux fonctions  $f$  et  $g$ . En d'autres

termes,  $V$  est une solution périodique de (3.6.14) si et seulement si

$$W(V, S_0 - S_1) = W(C_0 - C_1, V) = 0. \quad (3.6.15)$$

On ajoute ainsi à l'Équation (3.6.14) les conditions de bord (3.6.15) et on définit les fonctions caractéristiques correspondantes. En d'autres termes, on définit

$$\Delta_1(\mu^2, \theta^2) = W(C_0 - C_1, S_0 - S_1) = 2 - W(C_0, S_1) - W(C_1, S_0).$$

On insiste sur le fait que  $\Delta_1(\mu^2, \theta^2)$  s'annule si et seulement si il existe une solution périodique de (3.6.14) pour  $(\mu^2, \theta^2)$ . Les asymptotiques de  $W(C_0, S_1)$  et  $W(C_1, S_0)$  sont bien connues (voir par exemple [DKN15, FY01]). En effet, on sait que

$$W(C_0, S_1) = \cos(\mu \tilde{B}(\theta^2)) \times \left(1 + O\left(\frac{1}{\mu}\right)\right) \quad (3.6.16)$$

et

$$W(C_1, S_0) = \cos(\mu \tilde{B}(\theta^2)) \times \left(1 + O\left(\frac{1}{\mu}\right)\right), \quad (3.6.17)$$

où  $\mu = \sqrt{\mu^2}$  (nous n'avons pas besoin de préciser le signe de  $\mu$  puisque les fonctions caractéristiques sont paires). On obtient ainsi que

$$\Delta_1(\mu^2, \theta^2) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad 2 - 2 \cos(\mu \tilde{B}(\theta^2)) + O\left(\frac{1}{\mu}\right) = 0. \quad (3.6.18)$$

En utilisant le Théorème de Rouché (voir par exemple [FY01]) on peut en déduire que les couples  $(\mu^2, \theta^2)$  satisfaisant (3.6.18) sont proches pour  $\mu$  grand des couples  $(\mu^2, \theta^2)$  satisfaisant

$$2 - 2 \cos(\mu \tilde{B}(\theta^2)) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \cos(\mu \tilde{B}(\theta^2)) = 1.$$

Les solutions de cette dernière équation sont

$$\mu = \frac{2m\pi}{\tilde{B}(\theta^2)}, \quad m \in \mathbb{Z},$$

pour  $\theta^2$  satisfaisant (3.6.10) et  $m$  suffisamment grand. Enfin, on rappelle que  $\tilde{B}(\theta^2)$  est donné par (3.6.13). Ainsi, puisque  $s_{23}$  est une fonction strictement positive, la fonction  $\tilde{B}$  est strictement décroissante par rapport à  $\theta^2 \in [c_1 + \epsilon, c_2 - \epsilon]$ . La fonction  $\frac{1}{\tilde{B}(\theta^2)}$  est donc strictement croissante. On peut résumer ces propriétés sur la figure suivante :

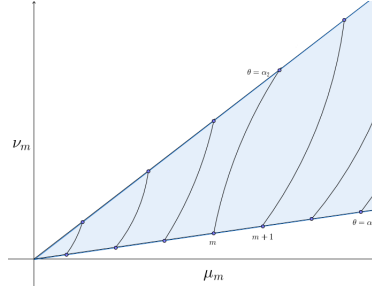


FIGURE 3.2 – Première approximation du spectre couplé

On procède à la même analyse sur l'Équation (3.6.8). On rappelle que si  $\theta^2$  satisfait (3.6.10) alors l'inégalité (3.6.12) est satisfaite pour  $\mu^2$  suffisamment grand. On peut ainsi poser

$$X^3 = \int_0^{x^3} \sqrt{-s_{32}(t) - \theta^2 s_{33}(t)} dt.$$

Cette nouvelle variable vérifie  $X^3 \in [0, \tilde{C}(\theta^2)]$ , où

$$\tilde{C}(\theta^2) = \int_0^C \sqrt{-s_{32}(t) - \theta^2 s_{33}(t)} dt. \quad (3.6.19)$$

On pose

$$W(X^3) = \left[ -s_{32}(x^3(X^3)) - \theta^2 s_{33}(x^3(X^3)) \right]^{\frac{1}{4}} w(x^3(X^3)).$$

Cette fonction satisfait alors, en la variable  $X^3$ , l'équation de Schrödinger

$$-\ddot{W}^2(X^3) + \tilde{Q}_{\theta^2}(X^3)W(X^3) = \mu^2 W(X^3), \quad \text{où} \quad \tilde{Q}_{\theta^2}(X^3) = O(1), \quad (3.6.20)$$

pour  $\theta^2$  satisfaisant (3.6.10) et  $\mu^2$  suffisamment grand. Comme précédemment, on obtient que (3.6.20) possède une solution périodique si et seulement si

$$\Delta_2(\mu^2, \theta^2) := 2 - W(C_0, S_1) - W(C_1, S_0) = 0.$$

Grâce aux asymptotiques (3.6.16)-(3.6.17) on obtient que

$$\Delta_2(\mu^2, \theta^2) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad 2 - 2 \cos\left(\mu \tilde{C}(\theta^2)\right) + O\left(\frac{1}{\mu}\right) = 0.$$

En utilisant à nouveau le Théorème de Rouché, on obtient que les couples  $(\mu^2, \theta^2)$

satisfaisant l'égalité précédente sont proches pour  $\mu$  grand des couples satisfaisant

$$\cos(\mu\tilde{C}(\theta^2)) = 1, \quad \text{i.e.} \quad \mu^2 = \frac{2\pi k}{\tilde{C}(\theta^2)}, \quad k \in \mathbb{Z},$$

où  $k$  est suffisamment grand et  $\theta^2$  satisfait l'Équation (3.6.10). On rappelle que  $\tilde{C}(\theta^2)$  est donné par (3.6.19). Ainsi, puisque  $s_{33}$  est une fonction strictement négative, la fonction  $\tilde{C}$  est strictement croissante pour  $\theta^2 \in [c_1 + \epsilon, c_2 - \epsilon]$ . La fonction  $\frac{1}{\tilde{C}(\theta^2)}$  est donc strictement décroissante. On peut résumer ces propriétés sur la figure suivante :

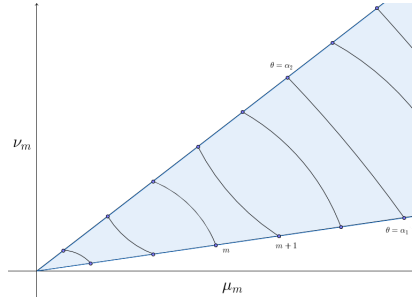


FIGURE 3.3 – Seconde approximation du spectre couplé

Le spectre couplé  $\Lambda = \{(\mu_m^2, \nu_m^2), m \geq 1\}$ , ou de façon équivalente le spectre couplé  $(\mu_m^2, \theta_m^2)$ , est alors donné par

$$\Lambda = \{\Delta_1(\mu^2, \theta^2) = 0\} \cap \{\Delta_2(\mu^2, \theta^2) = 0\},$$

puisque pour tout  $(\mu_m^2, \nu_m^2) \in \Lambda$ , il existe simultanément une solution périodique de (3.6.14) et une solution périodique de (3.6.20). En utilisant les deux figures précédentes on obtient la suivante sur laquelle le spectre couplé correspond aux intersections entre les courbes précédentes :

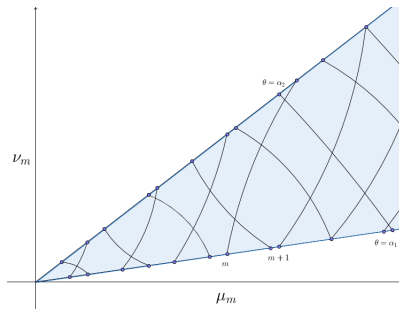


FIGURE 3.4 – Spectre couplé

On veut à présent utiliser cette structure particulière du spectre couplé pour prouver le Lemme 3.4.6. On travaille sur le plan  $(\mu, \theta)$  et on pose  $\nu = \theta\mu$ , avec  $0 < \alpha_1 \leq \theta \leq \alpha_2$ , où

$$\alpha_1 = \sqrt{c_1^2 + \epsilon} \quad \text{et} \quad \alpha_2 = \sqrt{c_2^2 - \epsilon},$$

avec  $\epsilon > 0$ . On rappelle que pour  $m$  grand  $\mu_m$  peut être approché par

$$\mu_m = \frac{2m\pi}{\tilde{B}(\theta^2)},$$

où

$$\tilde{B}(\theta^2) = \int_0^B \sqrt{-s_{22}(t) - \theta^2 s_{23}(t)} dt.$$

On commence par montrer que les courbes tracées sur la première figure sont séparées de façon uniforme. En d'autres termes, on montre qu'il existe  $\delta > 0$  tel que la distance entre deux courbes successives est toujours plus grande que  $\delta$ . Précisément, on veut montrer qu'il existe  $\delta > 0$  tel que pour  $m$  grand et pour tout  $(\theta_1, \theta_2) \in [\alpha_1, \alpha_2]^2$ ,

$$|\mu_{m+1}(\theta_2) - \mu_m(\theta_1)| + |\theta_2 \mu_{m+1}(\theta_2) - \theta_1 \mu_m(\theta_1)| \geq \delta. \quad (3.6.21)$$

Si on note,

$$d = |\mu_{m+1}(\theta_2) - \mu_m(\theta_1)|,$$

on obtient immédiatement que (3.6.21) est équivalent à

$$d + |d\theta_2 + (\theta_2 - \theta_1)\mu_m(\theta_1)| \geq \delta. \quad (3.6.22)$$

On applique à présent le Théorème des accroissements finis à l'application  $\frac{1}{\tilde{B}(\theta^2)}$  et on obtient ainsi

$$\frac{1}{\tilde{B}(\theta_2^2)} = \frac{1}{\tilde{B}(\theta_1^2)} + e(\xi)(\theta_2^2 - \theta_1^2),$$

où

$$e(\xi) = -\frac{\tilde{B}'(\xi^2)}{\tilde{B}(\xi^2)^2} > 0,$$

avec  $\xi \in (\theta_1, \theta_2)$ . En réalité, on peut montrer qu'il existe deux constantes positives  $e_1$  et  $e_2$  telles que

$$0 < e_1 \leq e(\xi) \leq e_2, \quad \forall \xi \in [\alpha_1, \alpha_2].$$

On obtient alors facilement que

$$d = \left| \frac{2\pi}{\tilde{B}(\theta_1^2)} + 2(m+1)\pi e(\xi)(\theta_1 + \theta_2)(\theta_1 - \theta_2) \right|.$$

En utilisant l'inégalité triangulaire on obtient ainsi que

$$2(m+1)\pi e(\xi)(\theta_1 + \theta_2)|\theta_1 - \theta_2| \geq \frac{2\pi}{\tilde{B}(\theta_1^2)} - d. \quad (3.6.23)$$

On doit donc étudier différents cas.

Cas 1 : Si

$$d \geq \frac{2\pi}{\tilde{B}(\theta_1^2)},$$

on obtient facilement

$$|\mu_{m+1}(\theta_2) - \mu_m(\theta_1)| + |\theta_2\mu_{m+1}(\theta_2) - \theta_1\mu_m(\theta_1)| \geq d \geq \frac{2\pi}{\tilde{B}(\theta_1^2)}.$$

Cas 2 : Si

$$d < \frac{2\pi}{\tilde{B}(\theta_1^2)},$$

alors (3.6.23) nous donne

$$|\theta_1 - \theta_2| > \frac{2\pi - d\tilde{B}(\theta_1^2)}{2(m+1)\pi e(\xi)(\theta_1 + \theta_2)\tilde{B}(\theta_1^2)}.$$

Ainsi,

$$\begin{aligned} \mu_m(\theta_1)|\theta_1 - \theta_2| &= \frac{2m\pi}{\tilde{B}(\theta_1^2)}|\theta_1 - \theta_2| \\ &> \frac{m}{m+1} \frac{2\pi - d\tilde{B}(\theta_1^2)}{e(\xi)(\theta_1 + \theta_2)\tilde{B}(\theta_1^2)^2} \\ &> \frac{2\pi - d\tilde{B}(\alpha_1^2)}{4e_2\alpha_2\tilde{B}(\alpha_1^2)^2}. \end{aligned}$$

On note que

$$d\theta_2 < \frac{2\pi - d\tilde{B}(\alpha_1^2)}{4e_2\alpha_2\tilde{B}(\alpha_1^2)^2} \Leftrightarrow d < \frac{2\pi}{(4\theta_2e_2\alpha_2\tilde{B}(\alpha_1^2) + 1)\tilde{B}(\alpha_1^2)}.$$



Si

$$d > \frac{2\pi}{(4\theta_2 e_2 \alpha_2 \tilde{B}(\alpha_1^2) + 1) \tilde{B}(\alpha_1^2)},$$

alors comme dans le premier cas, on obtient facilement

$$|\mu_{m+1}(\theta_2) - \mu_m(\theta_1)| + |\theta_2 \mu_{m+1}(\theta_2) - \theta_1 \mu_m(\theta_1)| \geq d \geq \delta.$$

Si

$$d < \frac{2\pi}{(4\theta_2 e_2 \alpha_2 \tilde{B}(\alpha_1^2) + 1) \tilde{B}(\alpha_1^2)},$$

on obtient alors

$$\begin{aligned} & |\mu_{m+1}(\theta_2) - \mu_m(\theta_1)| + |\theta_2 \mu_{m+1}(\theta_2) - \theta_1 \mu_m(\theta_1)| \\ &= d + |d\theta_2 + (\theta_2 - \theta_1)\mu_m(\theta_1)| \\ &= d + |\theta_2 - \theta_1|\mu_m(\theta_1) - d\theta_2 \\ &> d + \frac{2\pi - d\tilde{B}(\alpha_1^2)}{4e_2\alpha_2\tilde{B}(\alpha_1^2)^2} - d\theta_2 \\ &= \frac{\pi}{2e_2\alpha_2\tilde{B}(\alpha_1^2)^2} + d \left( 1 - \frac{1}{4e_2\alpha_2\tilde{B}(\alpha_1^2)} - \theta_2 \right). \end{aligned}$$

On note alors qu'il existe  $d_0 > 0$  tel que pour tout  $d < d_0$ ,

$$d \left( 1 - \frac{1}{4e_2\alpha_2\tilde{B}(\alpha_1^2)} - \theta_2 \right) > -\frac{\pi}{4e_2\alpha_2\tilde{B}(\alpha_1^2)^2}.$$

Ainsi, pour tout  $d < d_0$ , on obtient immédiatement

$$|\mu_{m+1}(\theta_2) - \mu_m(\theta_1)| + |\theta_2 \mu_{m+1}(\theta_2) - \theta_1 \mu_m(\theta_1)| \geq \frac{\pi}{4e_2\alpha_2\tilde{B}(\alpha_1^2)^2} \geq \delta.$$

De plus, si  $d \geq d_0$  on conclut comme dans le premier cas.

Nous avons ainsi montré que les courbes de la première figure sont uniformément séparées. Puisque la même analyse est valide pour la deuxième figure nous avons donc démontré le Lemme 3.4.6.  $\square$

### 3.6.3 Preuve du Lemme 3.4.8

Le but de cette Section est de prouver le Lemme 3.4.8 que nous rappelons ici.

**Lemme 3.6.3.** *On pose*

$$n(r) = \#E_M \cap B(0, r) \cap \mathcal{C},$$

où le cône  $\mathcal{C}$  a été défini dans (3.4.7) et

$$E_M = \{(|\mu_m|, |\nu_m|), m \geq 1\},$$

Alors

$$\overline{\lim} \frac{n(r)}{r^2} > 0, \quad r \rightarrow +\infty.$$

*Démonstration.* Pour prouver le Lemme on utilise les travaux de Colin de Verdière sur le spectre joint d'opérateurs pseudodifférentiels qui commutent (voir [CdV79, CdV80]). On rappelle que les opérateurs  $L$  et  $H$  sont définis par (3.2.4) et satisfont (3.2.9). Puisque l'on a prouvé dans le Lemme 3.2.5 que  $H$  et  $L$  sont des opérateurs semi-bornés, on peut affirmer qu'il existe  $M \in \mathbb{R}$  tel que  $L + M$  et  $H + M$  soient des opérateurs positifs. On pose alors

$$P_1 = \sqrt{L + M} \quad \text{et} \quad P_2 = \sqrt{H + M}.$$

Les opérateurs  $P_1$  et  $P_2$  sont des opérateurs pseudodifférentiels autoadjoints d'ordre 1 qui commutent tels que  $P_1^2 + P_2^2$  soit un opérateur elliptique. Ces opérateurs entrent donc dans le cadre de travail de [CdV79]. Les symboles principaux de  $P_1$  et  $P_2$  sont respectivement donnés par

$$p_1(x, \xi) = \sqrt{-\frac{s_{33}}{s_{11}}\xi_2^2 + \frac{s_{23}}{s_{11}}\xi_3^2} \quad \text{et} \quad p_2(x, \xi) = \sqrt{\frac{s_{32}}{s_{11}}\xi_2^2 - \frac{s_{22}}{s_{11}}\xi_3^2}. \quad (3.6.24)$$

On pose

$$p(x, \xi) = (p_1(x, \xi), p_2(x, \xi)),$$

où  $x := (x^2, x^3)$ ,  $\xi := (\xi_2, \xi_3)$  et  $(x, \xi)$  est un point du fibré cotangent de  $\mathcal{T}^2$ , i.e.  $T^*\mathcal{T}^2$ . On va utiliser le Théorème 0.7 de [CdV79] à  $P_1$  et  $P_2$ . On rappelle ici ce résultat adapté à notre cadre.

**Théoreme 3.6.4.** *Soit  $C$  un cône de  $\mathbb{R}^2 = \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$ , à bord  $C^1$  tel que  $\partial C \cap W = \emptyset$ , où  $\partial C$  est le bord de  $C$  et  $W$  est l'ensemble des valeurs critiques de  $p$ . On a alors*

$$\#\{\lambda \in C \cap \Lambda, |\lambda| \leq r\} = \frac{1}{4\pi^2} \text{vol}_\Omega \left( p^{-1}(C \cap B(0, r)) \right) + O(r),$$

où  $\Lambda$  est le spectre joint de  $P_1$  et  $P_2$  et  $\Omega = dx^2 \wedge dx^3 \wedge d\xi_2 \wedge d\xi_3$ .

Ainsi, pour utiliser le Théorème 3.6.4, on doit déterminer l'ensemble  $W$  des valeurs

critiques de  $p$ . On doit donc commencer par déterminer les points critiques de  $p$ , i.e. les points pour lesquels la différentielle de  $p$  n'est pas surjective. La différentielle  $Dp(x, \xi)$  de  $p$  est donnée par (on omet les variables)

$$\frac{-1}{4p_1p_2} \begin{pmatrix} \partial_2 \left( \frac{s_{33}}{s_{11}} \right) \xi_2^2 - \partial_2 \left( \frac{s_{23}}{s_{11}} \right) \xi_3^2 & \partial_3 \left( \frac{s_{33}}{s_{11}} \right) \xi_2^2 - \partial_3 \left( \frac{s_{23}}{s_{11}} \right) \xi_3^2 & 2 \frac{s_{33}}{s_{11}} \xi_2 & -2 \frac{s_{23}}{s_{11}} \xi_3 \\ -\partial_2 \left( \frac{s_{32}}{s_{11}} \right) \xi_2^2 + \partial_2 \left( \frac{s_{22}}{s_{11}} \right) \xi_3^2 & -\partial_3 \left( \frac{s_{32}}{s_{11}} \right) \xi_2^2 + \partial_3 \left( \frac{s_{22}}{s_{11}} \right) \xi_3^2 & -2 \frac{s_{32}}{s_{11}} \xi_2 & 2 \frac{s_{22}}{s_{11}} \xi_3 \end{pmatrix}.$$

On calcule les six mineurs  $2 \times 2$  de cette matrice et on cherche les points  $(x, \xi)$  pour lesquels tous ces mineurs s'annulent. Après calculs, on obtient que  $(x, \xi)$  est un point critique de  $p$  si et seulement si les quatre conditions suivantes sont satisfaites :

$$\begin{cases} \xi_2 \xi_3 = 0 \\ \xi_3 \partial_2(s_{22})(\xi_2^2 + \xi_3^2) = 0 \\ \xi_2 \partial_3(s_{33})(\xi_2^2 + \xi_3^2) = 0 \\ \partial_2(s_{22}) \partial_3(s_{33})(\xi_2^2 + \xi_3^2)^2 = 0 \end{cases}.$$

Ainsi, il y a quatre cas à étudier selon l'annulation de  $\partial_2(s_{22})$  et  $\partial_3(s_{33})$ . On obtient finalement que

$$W = \begin{cases} (0, 0) & \text{if } \partial_2(s_{22}) \neq 0 \text{ et } \partial_3(s_{33}) \neq 0 \\ \mathcal{D}_1 & \text{si } \partial_2(s_{22}) = 0 \text{ et } \partial_3(s_{33}) \neq 0 \\ \mathcal{D}_2 & \text{si } \partial_2(s_{22}) \neq 0 \text{ et } \partial_3(s_{33}) = 0 \\ \mathcal{D}_1 \cup \mathcal{D}_2 & \text{si } \partial_2(s_{22}) = 0 \text{ et } \partial_3(s_{33}) = 0 \end{cases},$$

où

$$\mathcal{D}_1 = \{t(\sqrt{s_{23}}, \sqrt{-s_{22}}), t \geq 0\} \quad \text{et} \quad \mathcal{D}_2 = \{t(\sqrt{-s_{33}}, \sqrt{s_{32}}), t \geq 0\},$$

où  $s_{22}$ ,  $s_{23} = s_{22} + 1$ ,  $s_{33}$  et  $s_{32} = s_{33} + 1$  sont des fonctions constantes selon le cas que l'on étudie. On rappelle maintenant que dans le Théorème 3.6.4, on doit choisir un cône  $C$  tel que  $\partial C \cap W = \emptyset$  et l'on veut étudier l'ensemble

$$p^{-1}(C \cap B(0, r)) = p^{-1}(C) \cap p^{-1}(B(0, r)).$$

Soit  $r > 0$ , on commence par étudier l'ensemble  $p^{-1}(B(0, r))$ . On rappelle qu'il existe une constante  $c_1 > 0$  telle que

$$\max \left( -\frac{s_{33}}{s_{11}}, \frac{s_{23}}{s_{11}}, \frac{s_{32}}{s_{11}}, -\frac{s_{22}}{s_{11}} \right) \leq c_1.$$

### 3.6. Appendices

---

Ainsi, si  $(\xi_2, \xi_3) \in B\left(0, \frac{r}{\sqrt{2c_1}}\right)$  et  $(x^2, x^3) \in \mathcal{T}^2$ , alors

$$\|p(x, \xi)\| = \sqrt{p_1(x, \xi) + p_2(x, \xi)} \leq \sqrt{2c_1(\xi_2^2 + \xi_3^2)} \leq r.$$

On déduit de ceci que

$$\mathcal{T}^2 \times B\left(0, \frac{r}{\sqrt{2c_1}}\right) \subset p^{-1}(B(0, r)). \quad (3.6.25)$$

On étudie maintenant l'ensemble  $p^{-1}(C)$ . On doit séparer notre étude en quatre cas comme nous l'avons vu précédemment.

Cas 1 :  $\partial_2(s_{22}) \neq 0$  et  $\partial_3(s_{33}) \neq 0$ . Dans ce cas on doit seulement éviter le point  $\{(0, 0)\}$ .

On considère le cône

$$C = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \text{ tel que } \epsilon \leq x, \epsilon \leq y\}, \quad \epsilon > 0.$$

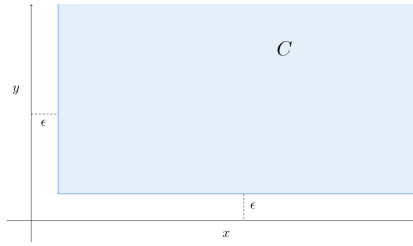


FIGURE 3.5 – Cas 1

Par définition

$$p^{-1}(C) = \{(x, \xi) \in \mathcal{T}^2 \times \mathbb{R}^2, \epsilon \leq p_1(x, \xi), \epsilon \leq p_2(x, \xi)\}$$

et puisqu'il existe  $c_2 > 0$  tel que

$$c_2 \leq \min\left(-\frac{s_{33}}{s_{11}}, \frac{s_{23}}{s_{11}}, \frac{s_{32}}{s_{11}}, -\frac{s_{22}}{s_{11}}\right),$$

il existe  $\eta > 0$  tel que

$$\mathcal{T}^2 \times (\mathbb{R}^2 \setminus B(0, \eta)) \subset p^{-1}(C).$$

Cas 2 :  $\partial_2(s_{22}) = 0$  et  $\partial_3(s_{33}) \neq 0$ . On doit éviter la demi-droite  $\mathcal{D}_1$  qui a pour pente

$\beta_1 = \sqrt{\frac{-s_{22}}{s_{23}}}$ . On considère le cône

$$C = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \text{ tel que } \epsilon \leq x, \epsilon \leq y \leq \beta_1 x - \epsilon\}, \quad \epsilon > 0.$$

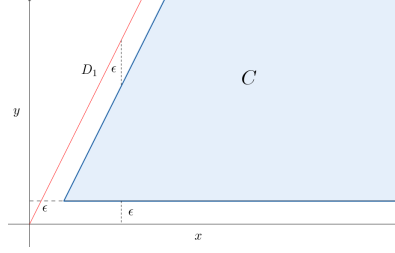


FIGURE 3.6 – Cas 2

Comme dans le premier cas, il existe  $\eta > 0$  tel que

$$p_1(x, \xi) \geq \epsilon, \quad \forall (x, \xi) \in \mathcal{T}^2 \times (\mathbb{R}^2 \setminus B(0, \eta))$$

et

$$p_2(x, \xi) \geq \epsilon, \quad \forall (x, \xi) \in \mathcal{T}^2 \times (\mathbb{R}^2 \setminus B(0, \eta)).$$

La dernière condition peut être réécrite sous la forme

$$\begin{aligned} p_2(x, \xi) \leq \beta_1 p_1(x, \xi) - \epsilon &\Leftrightarrow \sqrt{\frac{s_{32}}{s_{11}} \xi_2^2 - \frac{s_{22}}{s_{11}} \xi_3^2} \leq \sqrt{\frac{-s_{22}}{s_{23}}} \sqrt{-\frac{s_{33}}{s_{11}} \xi_2^2 + \frac{s_{23}}{s_{11}} \xi_3^2} - \epsilon \\ &\Leftrightarrow \sqrt{\frac{s_{32}}{s_{11}} \xi_2^2 - \frac{s_{22}}{s_{11}} \xi_3^2} \leq \sqrt{\frac{s_{22}s_{33}}{s_{23}s_{11}} \xi_2^2 - \frac{s_{22}}{s_{11}} \xi_3^2} - \epsilon. \end{aligned}$$

On rappelle que, grâce à la condition donnée dans la Remarque 3.1.18,

$$\frac{s_{22}s_{33}}{s_{23}} > s_{32}.$$

Ainsi, il existe  $\epsilon > 0$  assez petit tel que

$$p_2(x, \xi) \leq \beta_1 p_1(x, \xi) - \epsilon, \quad \forall (x, \xi) \in \mathcal{T}^2 \times \mathbb{R}^2.$$

Finalement, on a montré que pour un tel  $\epsilon$ , il existe  $\eta > 0$  tel que

$$\mathcal{T}^2 \times (\mathbb{R}^2 \setminus B(0, \eta)) \subset p^{-1}(C).$$

### 3.6. Appendices

---

Cas 3 :  $\partial_2(s_{22}) \neq 0$  et  $\partial_3(s_{33}) = 0$ . On doit dans ce cas éviter la demi-droite  $\mathcal{D}_2$  qui a pour pente  $\beta_2 = \sqrt{-\frac{s_{32}}{s_{33}}}$ . On considère le cône

$$C = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \text{ tel que } \epsilon \leq x, \beta_2 x + \epsilon \leq y\}, \quad \epsilon > 0,$$

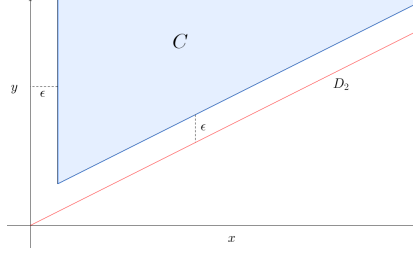


FIGURE 3.7 – Cas 3

et on montre, comme dans le deuxième cas, que pour  $\epsilon > 0$  assez petit il existe  $\eta > 0$  tel que

$$\mathcal{T}^2 \times (\mathbb{R}^2 \setminus B(0, \eta)) \subset p^{-1}(C).$$

Cas 4 :  $\partial_2(s_{22}) = 0$  et  $\partial_3(s_{33}) = 0$ . On doit alors éviter l'ensemble  $\mathcal{D}_1 \cup \mathcal{D}_2$ . On considère le cône

$$C = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \text{ tel que } \epsilon \leq x, \beta_2 x + \epsilon \leq y \leq \beta_1 x - \epsilon\}, \quad \epsilon > 0.$$

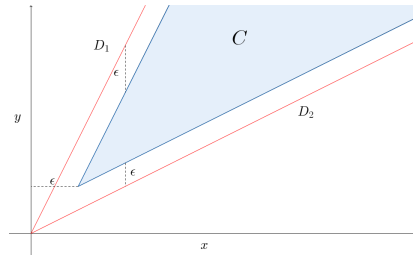


FIGURE 3.8 – Cas 4

Comme dans le premier cas, il existe  $\eta > 0$  tel que

$$p_1(x, \xi) \geq \epsilon, \quad \forall (x, \xi) \in \mathcal{T}^2 \times (\mathbb{R}^2 \setminus B(0, \eta))$$

et, comme dans les deuxième et troisième cas, il existe  $\epsilon > 0$  assez petit tel que

$$p_2(x, \xi) \leq \beta_1 p_1(x, \xi) - \epsilon, \quad \forall (x, \xi) \in \mathcal{T}^2 \times \mathbb{R}^2$$

et

$$\beta_2 p_1(x, \xi) + \epsilon \leq p_2(x, \xi), \quad \forall (x, \xi) \in \mathcal{T}^2 \times \mathbb{R}^2.$$

Ainsi, pour  $\epsilon > 0$  assez petit, il existe  $\eta > 0$  tel que

$$\mathcal{T}^2 \times (\mathbb{R}^2 \setminus B(0, \eta)) \subset p^{-1}(C).$$

En conclusion, on a montré que dans tous les cas il existe  $\eta > 0$  tel que

$$\mathcal{T}^2 \times (\mathbb{R}^2 \setminus B(0, \eta)) \subset p^{-1}(C). \quad (3.6.26)$$

De plus, dans chaque cas le cône  $\mathcal{C}$  défini dans (3.4.7) est, par définition, inclu dans le cône  $C$  que nous avons considéré. On peut ainsi appliquer le Théorème 3.6.4 à ce cône. Ainsi, grâce à (3.6.25)-(3.6.26) on a ainsi montré que pour  $r > 0$  suffisamment grand

$$\mathcal{T}^2 \times \left( B\left(0, \frac{r}{\sqrt{2c_1}}\right) \setminus B(0, \eta) \right) \subset p^{-1}(\mathcal{C}) \cap p^{-1}(B(0, r)) = p^{-1}(\mathcal{C} \cap B(0, r)). \quad (3.6.27)$$

De l'inclusion (3.6.27) on peut déduire qu'il existe une constante  $c > 0$  telle que

$$cr^2 \leq \frac{1}{4\pi^2} \text{vol}_\Omega \left( B\left(0, \frac{r}{\sqrt{2c_1}}\right) \setminus B(0, \eta) \right) \leq \frac{1}{4\pi^2} \text{vol}_\Omega \left( p^{-1}(\mathcal{C} \cap B(0, r)) \right).$$

Grâce au Théorème 3.6.4, on peut alors conclure qu'il existe  $c > 0$  tel que

$$\#\{\lambda \in \mathcal{C} \cap \Lambda, |\lambda| \leq r\} \geq cr^2.$$

Finalement, on rappelle que

$$\Lambda = \{(\sqrt{\mu_m^2 + M}, \sqrt{\nu_m^2 + M}), \quad m \geq 1\}$$

et on note que, puisque  $\mu_m^2 \rightarrow +\infty$  et  $\nu_m^2 \rightarrow +\infty$ , lorsque  $m \rightarrow +\infty$ ,

$$\sqrt{\mu_m^2 + M} \sim |\mu_m| \quad \text{et} \quad \sqrt{\nu_m^2 + M} \sim |\nu_m|, \quad m \rightarrow \infty.$$

On rappelle enfin que

$$n(r) = \#\{\lambda \in \mathcal{C} \cap E_M, |\lambda| \leq r\},$$

sans compter la multiplicité, alors que le résultat obtenu ici a été calculé en comptant la multiplicité. Cependant, la multiplicité des valeurs propres couplées est au plus 4 (voir la Remarque 3.2.7). Ainsi, quitte à diviser par 4, on peut bien conclure que

$$\overline{\lim} \frac{n(r)}{r^2} > 0, \quad r \rightarrow +\infty.$$

□





# Bibliographie

- [AKvdM00] Tuncay AKTOSUN, Martin KLAUS et Cornelis van der MEE : Direct and inverse scattering for selfadjoint Hamiltonian systems on the line. *Integral Equations Operator Theory*, 38(2):129–171, 2000. [15](#), [28](#), [34](#), [47](#), [48](#), [49](#), [92](#), [93](#), [94](#), [98](#), [103](#), [104](#), [105](#), [108](#), [147](#)
- [Arn13] Vladimir Igorevich ARNOL'D : *Mathematical methods of classical mechanics*, volume 60. Springer Science & Business Media, 2013. [173](#)
- [Bac91] Alain BACHELOT : Gravitational scattering of electromagnetic field by Schwarzschild black-hole. *Ann. Inst. H. Poincaré Phys. Théor.*, 54(3):261–320, 1991. [20](#), [84](#)
- [Bac94] Alain BACHELOT : Asymptotic completeness for the Klein-Gordon equation on the Schwarzschild metric. *Ann. Inst. H. Poincaré Phys. Théor.*, 61(4):411–441, 1994. [20](#), [84](#)
- [Bac97] Alain BACHELOT : Quantum vacuum polarization at the black-hole horizon. *Ann. Inst. H. Poincaré Phys. Théor.*, 67(2):181–222, 1997. [20](#), [84](#)
- [Bac99] Alain BACHELOT : The Hawking effect. *Ann. Inst. H. Poincaré Phys. Théor.*, 70(1):41–99, 1999. [20](#), [84](#)
- [BCR02a] S. BENENTI, C. CHANU et G. RASTELLI : Remarks on the connection between the additive separation of the Hamilton-Jacobi equation and the multiplicative separation of the Schrödinger equation. I. The completeness and Robertson conditions. *J. Math. Phys.*, 43(11):5183–5222, 2002. [23](#), [166](#), [168](#), [169](#), [173](#), [175](#)
- [BCR02b] S. BENENTI, C. CHANU et G. RASTELLI : Remarks on the connection between the additive separation of the Hamilton-Jacobi equation and the multiplicative separation of the Schrödinger equation. II. First integrals

- and symmetry operators. *J. Math. Phys.*, 43(11):5223–5253, 2002. [23](#), [166](#), [173](#), [175](#)
- [Ben93] Sergio BENENTI : Orthogonal separable dynamical systems. In *Differential geometry and its applications (Opava, 1992)*, volume 1 de *Math. Publ.*, pages 163–184. Silesian Univ. Opava, Opava, 1993. [174](#)
- [Ben01] Christer BENNEWITZ : A proof of the local Borg-Marchenko theorem. *Comm. Math. Phys.*, 218(1):131–132, 2001. [17](#), [32](#), [37](#), [59](#), [196](#)
- [Ben15] Sergio BENENTI : Separability in riemannian manifolds. *arXiv preprint arXiv :1512.07833*, 2015. [23](#), [166](#), [168](#), [170](#), [171](#), [173](#), [174](#), [186](#)
- [Ber78] Bo BERNDTSSON : Zeros of analytic functions of several variables. *Ark. Mat.*, 16(2):251–262, 1978. [234](#)
- [BF80] Sergio BENENTI et Mauro FRANCAVIGLIA : The theory of separability of the Hamilton-Jacobi equation and its applications to general relativity. In *General relativity and gravitation, Vol. 1*, pages 393–439. Plenum, New York-London, 1980. [173](#)
- [Blo90] Thomas BLOOM : A spanning set for  $\mathcal{C}(I^n)$ . *Trans. Amer. Math. Soc.*, 321(2):741–759, 1990. [200](#), [234](#)
- [BM15] Alexey V. BOLSINOV et Vladimir S. MATVEEV : Local normal forms for geodesically equivalent pseudo-Riemannian metrics. *Trans. Amer. Math. Soc.*, 367(9):6719–6749, 2015. [186](#)
- [Boa54] Ralph Philip BOAS, Jr. : *Entire functions*. Academic Press Inc., New York, 1954. [62](#), [96](#), [137](#), [156](#), [236](#)
- [Bor07] David BORTHWICK : *Spectral theory of infinite-area hyperbolic surfaces*, volume 256 de *Progress in Mathematics*. Birkhäuser Boston, Inc., Boston, MA, 2007. [188](#), [202](#)
- [Bou13] Jean-Marc BOUCLET : Absence of eigenvalue at the bottom of the continuous spectrum on asymptotically hyperbolic manifolds. *Ann. Global Anal. Geom.*, 44(2):115–136, 2013. [188](#), [202](#)
- [BP11] David BORTHWICK et Peter A. PERRY : Inverse scattering results for manifolds hyperbolic near infinity. *J. Geom. Anal.*, 21(2):305–333, 2011. [19](#), [37](#), [192](#)

- [Cal80] Alberto-P. CALDERÓN : On an inverse boundary value problem. *In Seminar on Numerical Analysis and its Applications to Continuum Physics (Rio de Janeiro, 1980)*, pages 65–73. Soc. Brasil. Mat., Rio de Janeiro, 1980. [13](#)
- [CdV79] Yves Colin de VERDIÈRE : Spectre conjoint d’opérateurs pseudo-différentiels qui commutent. I. Le cas non intégrable. *Duke Math. J.*, 46(1):169–182, 1979. [200](#), [257](#)
- [CdV80] Yves Colin de VERDIÈRE : Spectre conjoint d’opérateurs pseudo-différentiels qui commutent. II. Le cas intégrable. *Math. Z.*, 171(1):51–73, 1980. [200](#), [257](#)
- [CKM92] K. CHADAN, R. KOBAYASHI et M. MUSETTE : The inverse problem in the coupling constant for the Schrödinger equation. II. *Inverse Problems*, 8(1):45–57, 1992. [113](#)
- [CM69] K. CHADAN et E. MOURRE : Potential scattering in the limit of large coupling. *Nuovo Cimento A (10)*, 64:961–978, 1969. [95](#), [113](#)
- [Col77] P. D. B. COLLINS : *An introduction to Regge theory & high energy physics*. Cambridge University Press, Cambridge-New York-Melbourne, 1977. Cambridge Monographs on Mathematical Physics, Vol. 4. [28](#), [167](#)
- [CP82] Jeffrey M. COHEN et Robert T. POWERS : The general relativistic hydrogen atom. *Comm. Math. Phys.*, 86(1):69–86, 1982. [43](#)
- [CR06] Claudia CHANU et Giovanni RASTELLI : Fixed energy  $R$ -separation for Schrödinger equation. *Int. J. Geom. Methods Mod. Phys.*, 3(3):489–508, 2006. [23](#), [166](#)
- [dAR65] V. de ALFARO et T. REGGE : *Potential scattering*. North-Holland Publishing Co., Amsterdam ; Interscience Publishers Division John Wiley & Sons, Inc., New York, 1965. [28](#), [167](#)
- [Dau10] Thierry DAUDÉ : Time-dependent scattering theory for charged Dirac fields on a Reissner-Nordström black hole. *J. Math. Phys.*, 51(10):102504, 57, 2010. [15](#), [21](#), [34](#), [85](#), [88](#), [90](#), [98](#), [99](#), [100](#), [102](#), [104](#)
- [DGN13] Thierry DAUDE, Damien GOBIN et François NICOLEAU : Local inverse scattering at fixed energy in spherically symmetric asymptotically hyperbolic manifolds. *arXiv preprint arXiv :1310.0733*, 2013. [17](#), [27](#), [31](#), [92](#), [167](#)

- 
- [Dim85] J. DIMOCK : Scattering for the wave equation on the Schwarzschild metric. *Gen. Relativity Gravitation*, 17(4):353–369, 1985. [20](#), [84](#)
- [DK86] J. DIMOCK et Bernard S. KAY : Scattering for massive scalar fields on Coulomb potentials and Schwarzschild metrics. *Classical Quantum Gravity*, 3(1):71–80, 1986. [20](#), [84](#)
- [DKN14] Thierry DAUDÉ, Niky KAMRAN et François NICOLEAU : Inverse scattering at fixed energy on asymptotically hyperbolic liouville surfaces. *to appear in Inverse Problems, arXiv preprint arXiv :1409.6229*, 2014. [28](#), [29](#), [80](#), [121](#), [167](#), [187](#), [188](#), [195](#), [196](#), [200](#), [202](#), [216](#), [219](#), [222](#), [226](#), [227](#), [231](#), [235](#), [236](#), [240](#)
- [DKN15] Thierry DAUDÉ, Niky KAMRAN et François NICOLEAU : Non-uniqueness results for the anisotropic calderon problem with data measured on disjoint sets. *arXiv preprint arXiv :1510.06559*, 2015. [28](#), [167](#), [234](#), [251](#)
- [DN08] Thierry DAUDÉ et François NICOLEAU : Recovering the mass and the charge of a Reissner-Nordström black hole by an inverse scattering experiment. *Inverse Problems*, 24(2):025017, 18, 2008. [20](#), [84](#)
- [DN09] Thierry DAUDÉ et François NICOLEAU : Corrigendum : Recovering the mass and the charge of a Reissner-Nordström black hole by an inverse scattering experiment. *Inverse Problems*, 25(5):059801, 4, 2009. [20](#), [84](#)
- [DN10] Thierry DAUDÉ et François NICOLEAU : Inverse scattering in de Sitter-Reissner-Nordström black hole spacetimes. *Rev. Math. Phys.*, 22(4):431–484, 2010. [15](#), [20](#), [28](#), [34](#), [68](#), [84](#), [85](#), [88](#), [89](#), [103](#), [106](#)
- [DN11] Thierry DAUDÉ et François NICOLEAU : Inverse scattering at fixed energy in de Sitter-Reissner-Nordström black holes. *Ann. Henri Poincaré*, 12(1):1–47, 2011. [15](#), [16](#), [20](#), [28](#), [29](#), [34](#), [35](#), [36](#), [37](#), [38](#), [39](#), [41](#), [42](#), [47](#), [49](#), [50](#), [53](#), [54](#), [55](#), [59](#), [62](#), [68](#), [70](#), [71](#), [74](#), [75](#), [76](#), [80](#), [81](#), [84](#), [85](#), [91](#), [92](#), [94](#), [95](#), [96](#), [112](#), [113](#), [115](#), [117](#), [118](#), [119](#), [143](#), [145](#), [148](#), [153](#), [156](#), [163](#), [167](#)
- [DN13] Thierry DAUDÉ et François NICOLEAU : Direct and inverse scattering at fixed energy for massless charged dirac fields by kerr-newman-de sitter black holes. *arXiv preprint arXiv :1307.2842*, 2013. [28](#), [88](#), [100](#), [167](#)
- [DN15] Thierry DAUDÉ et François NICOLEAU : Local inverse scattering at a fixed energy for radial schrödinger operators and localization of the regge poles. *arXiv preprint arXiv :1502.02276*, 2015. [28](#), [167](#)

- [DSFKLS13] David DOS SANTOS FERREIRA, Yaroslav KURYLEV, Matti LASSAS et Mikko SALO : The calderón problem in transversally anisotropic geometries. *arXiv preprint arXiv :1305.1273*, 2013. [186](#), [193](#)
- [DSFKSU09] David DOS SANTOS FERREIRA, Carlos E. KENIG, Mikko SALO et Gunther UHLMANN : Limiting Carleman weights and anisotropic inverse problems. *Invent. Math.*, 178(1):119–171, 2009. [186](#), [193](#)
- [DvdM08] Francesco DEMONTIS et Cornelis van der MEE : Scattering operators for matrix Zakharov-Shabat systems. *Integral Equations Operator Theory*, 62(4):517–540, 2008. [104](#)
- [Eis34] Luther Pfahler EISENHART : Separable systems of Stackel. *Ann. of Math. (2)*, 35(2):284–305, 1934. [23](#), [25](#), [166](#), [170](#)
- [Eis97] Luther Pfahler EISENHART : *Riemannian geometry*. Princeton Landmarks in Mathematics. Princeton University Press, Princeton, NJ, 1997. Eighth printing, Princeton Paperbacks. [23](#), [166](#), [170](#)
- [FY01] Gerhard FREILING et Vjacheslav Anatoljevich YURKO : *Inverse Sturm-Liouville problems and their applications*. NOVA Science Publishers New York, 2001. [251](#)
- [FY05] Gerhard FREILING et Vjacheslav YURKO : Inverse problems for differential operators with singular boundary conditions. *Math. Nachr.*, 278(12-13): 1561–1578, 2005. [40](#), [41](#), [54](#), [55](#), [59](#), [77](#), [97](#), [118](#), [153](#), [195](#), [196](#), [200](#), [216](#), [233](#), [240](#)
- [Gob15] Damien GOBIN : Inverse scattering at fixed energy for massive charged Dirac fields in de Sitter-Reissner-Nordström black holes. *Inverse Problems*, 31(5):055001, 56, 2015. [27](#), [83](#), [167](#)
- [Gob16] Damien GOBIN : Inverse scattering at fixed energy on three-dimensional asymptotically hyperbolic stackel manifolds. *arXiv preprint arXiv :1605.05115*, 2016. [27](#), [165](#)
- [GŠ56] I. M. GEL'FAND et Z. Ya. ŠAPIRO : Representations of the group of rotations of 3-dimensional space and their applications. *Amer. Math. Soc. Transl. (2)*, 2:207–316, 1956. [99](#)

- 
- [GS00] Fritz GESZTESY et Barry SIMON : On local Borg-Marchenko uniqueness results. *Comm. Math. Phys.*, 211(2):273–287, 2000. [17](#), [32](#), [37](#), [196](#)
- [GSB08] Colin GUILLARMOU et Antônio SÁ BARRETO : Scattering and inverse scattering on ACH manifolds. *J. Reine Angew. Math.*, 622:1–55, 2008. [18](#), [37](#), [191](#), [193](#)
- [GSB09] Colin GUILLARMOU et Antônio SÁ BARRETO : Inverse problems for Einstein manifolds. *Inverse Probl. Imaging*, 3(1):1–15, 2009. [18](#), [19](#), [24](#), [37](#), [166](#), [179](#), [191](#), [192](#)
- [GT11] Colin GUILLARMOU et Leo TZOU : Calderón inverse problem with partial data on Riemann surfaces. *Duke Math. J.*, 158(1):83–120, 2011. [193](#)
- [GT13] Colin GUILLARMOU et Leo TZOU : The Calderón inverse problem in two dimensions. In *Inverse problems and applications : inside out. II*, volume 60 de *Math. Sci. Res. Inst. Publ.*, pages 119–166. Cambridge Univ. Press, Cambridge, 2013. [13](#), [166](#), [193](#)
- [Häf03] Dietrich HÄFNER : Sur la théorie de la diffusion pour l'équation de Klein-Gordon dans la métrique de Kerr. *Dissertationes Math. (Rozprawy Mat.)*, 421:102, 2003. [20](#), [84](#)
- [Häf09] Dietrich HÄFNER : Creation of fermions by rotating charged black holes. *Mém. Soc. Math. Fr. (N.S.)*, (117):158, 2009. [20](#), [84](#)
- [Heu96] Markus HEUSLER : *Black hole uniqueness theorems*, volume 6 de *Cambridge Lecture Notes in Physics*. Cambridge University Press, Cambridge, 1996. [84](#)
- [HN04] Dietrich HÄFNER et Jean-Philippe NICOLAS : Scattering of massless Dirac fields by a Kerr black hole. *Rev. Math. Phys.*, 16(1):29–123, 2004. [20](#), [84](#)
- [Hor73] Lars HORMANDER : *An introduction to complex analysis in several variables*, volume 7. Elsevier, 1973. [234](#)
- [Hor11] Miklós HORVÁTH : Partial identification of the potential from phase shifts. *J. Math. Anal. Appl.*, 380(2):726–735, 2011. [38](#), [55](#), [56](#)
- [IK14] Hiroshi ISOZAKI et Yaroslav KURYLEV : *Introduction to spectral theory and inverse problem on asymptotically hyperbolic manifolds*, volume 32 de *MSJ*

- Memoirs*. Mathematical Society of Japan, Tokyo, 2014. [13](#), [18](#), [19](#), [24](#), [25](#), [26](#), [27](#), [33](#), [37](#), [166](#), [179](#), [181](#), [182](#), [187](#), [188](#), [189](#), [190](#), [191](#), [192](#), [202](#)
- [IKL14] Hiroshi ISOZAKI, Yaroslav KURYLEV et Matti LASSAS : Conic singularities, generalized scattering matrix, and inverse scattering on asymptotically hyperbolic surfaces. *Journal für die reine und angewandte Mathematik (Crelles Journal)*, 2014. [187](#), [188](#), [202](#)
- [Iso04] Hiroshi ISOZAKI : Inverse spectral problems on hyperbolic manifolds and their applications to inverse boundary value problems in Euclidean space. *Amer. J. Math.*, 126(6):1261–1313, 2004. [121](#)
- [Jin98] Wei Min JIN : Scattering of massive Dirac fields on the Schwarzschild black hole spacetime. *Classical Quantum Gravity*, 15(10):3163–3175, 1998. [20](#), [84](#)
- [JSB00] Mark S. JOSHI et Antônio SÁ BARRETO : Inverse scattering on asymptotically hyperbolic manifolds. *Acta Math.*, 184(1):41–86, 2000. [18](#), [24](#), [33](#), [37](#), [166](#), [179](#), [188](#), [191](#), [202](#)
- [KKL01] Alexander KATCHALOV, Yaroslav KURYLEV et Matti LASSAS : *Inverse boundary spectral problems*, volume 123 de *Chapman & Hall/CRC Monographs and Surveys in Pure and Applied Mathematics*. Chapman & Hall/CRC, Boca Raton, FL, 2001. [13](#), [166](#), [205](#), [206](#), [212](#)
- [KM80] E. G. KALNINS et Willard MILLER, Jr. : Killing tensors and variable separation for Hamilton-Jacobi and Helmholtz equations. *SIAM J. Math. Anal.*, 11(6):1011–1026, 1980. [23](#), [166](#), [170](#), [173](#), [174](#)
- [KM82] E. G. KALNINS et Willard MILLER, Jr. : Intrinsic characterisation of orthogonal separation of one coordinate in the Hamilton-Jacobi equation. *J. Phys. A*, 15(7):2003–2011, 1982. [23](#), [166](#)
- [KM84] E. G. KALNINS et W. MILLER, Jr. : The theory of orthogonal  $R$ -separation for Helmholtz equations. *Adv. in Math.*, 51(1):91–106, 1984. [23](#), [166](#), [174](#), [175](#), [204](#), [205](#), [206](#)
- [Koo80] Tom H. KOORNWINDER : A precise definition of separation of variables. In *Geometrical approaches to differential equations (Proc. Fourth Scheveningen Conf., Scheveningen, 1979)*, volume 810 de *Lecture Notes in Math.*, pages 240–263. Springer, Berlin, 1980. [173](#)



- [KS13] Carlos KENIG et Mikko SALO : The Calderón problem with partial data on manifolds and applications. *Anal. PDE*, 6(8):2003–2048, 2013. [193](#)
- [KS14] Carlos KENIG et Mikko SALO : Recent progress in the Calderón problem with partial data. In *Inverse problems and applications*, volume 615 de *Contemp. Math.*, pages 193–222. Amer. Math. Soc., Providence, RI, 2014. [13](#), [166](#), [193](#)
- [KST12] Aleksey KOSTENKO, Alexander SAKHNOVICH et Gerald TESCHL : Weyl-Titchmarsh theory for Schrödinger operators with strongly singular potentials. *Int. Math. Res. Not. IMRN*, (8):1699–1747, 2012. [195](#), [196](#), [233](#)
- [Lak79] Kayll LAKE : Reissner-nordström-de sitter metric, the third law, and cosmic censorship. *Physical Review D*, 19(2):421, 1979. [69](#), [87](#)
- [LC04] T. LEVI-CIVITA : Sulla integrazione della equazione di Hamilton-Jacobi per separazione di variabili. *Math. Ann.*, 59(3):383–397, 1904. [171](#)
- [Leb65] N. N. LEBEDEV : *Special functions and their applications*. Revised English edition. Translated and edited by Richard A. Silverman. Prentice-Hall, Inc., Englewood Cliffs, N.J., 1965. [117](#), [118](#), [119](#), [120](#), [122](#), [126](#), [133](#)
- [Lev96] B. Ya. LEVIN : *Lectures on entire functions*, volume 150 de *Translations of Mathematical Monographs*. American Mathematical Society, Providence, RI, 1996. In collaboration with and with a preface by Yu. Lyubarskii, M. Sodin and V. Tkachenko, Translated from the Russian manuscript by Tkachenko. [55](#)
- [LR10] Philippe G. LEFLOCH et Luc ROZOY : Uniqueness of Kottler spacetime and the Besse conjecture. *C. R. Math. Acad. Sci. Paris*, 348(19-20):1129–1132, 2010. [84](#)
- [LTU03] Matti LASSAS, Michael TAYLOR et Gunther UHLMANN : The Dirichlet-to-Neumann map for complete Riemannian manifolds with boundary. *Comm. Anal. Geom.*, 11(2):207–221, 2003. [193](#)
- [LU89] John M. LEE et Gunther UHLMANN : Determining anisotropic real-analytic conductivities by boundary measurements. *Comm. Pure Appl. Math.*, 42(8):1097–1112, 1989. [193](#)

- [LU01]      Matti LASSAS et Gunther UHLMANN : On determining a Riemannian manifold from the Dirichlet-to-Neumann map. *Ann. Sci. École Norm. Sup. (4)*, 34(5):771–787, 2001. [193](#)
  
- [Mar09]      Leonardo MARAZZI : Inverse scattering on conformally compact manifolds. *Inverse Probl. Imaging*, 3(3):537–550, 2009. [19](#), [37](#), [192](#)
  
- [Mel00]      Fabrice MELNYK : Wave operators for the massive charged linear Dirac field on the Reissner-Nordström metric. *Classical Quantum Gravity*, 17(11):2281–2296, 2000. [20](#), [84](#)
  
- [Mel03]      Fabrice MELNYK : Scattering on Reissner-Nordström metric for massive charged spin 1/2 fields. *Ann. Henri Poincaré*, 4(5):813–846, 2003. [20](#), [70](#), [84](#)
  
- [Mel04]      Fabrice MELNYK : The Hawking effect for spin 1/2 fields. *Comm. Math. Phys.*, 244(3):483–525, 2004. [20](#), [21](#), [84](#), [85](#), [88](#), [90](#), [98](#), [99](#), [100](#), [102](#), [104](#), [179](#)
  
- [Mil88]      Willard MILLER, Jr. : Mechanisms for variable separation in partial differential equations and their relationship to group theory. In *Symmetries and nonlinear phenomena (Paipa, 1988)*, volume 9 de *CIF Ser.*, pages 188–221. World Sci. Publ., Teaneck, NJ, 1988. [23](#), [166](#), [168](#)
  
- [MM87]      Rafe R. MAZZEO et Richard B. MELROSE : Meromorphic extension of the resolvent on complete spaces with asymptotically constant negative curvature. *J. Funct. Anal.*, 75(2):260–310, 1987. [181](#)
  
- [Mou81]      E. MOURRE : Absence of singular continuous spectrum for certain selfadjoint operators. *Comm. Math. Phys.*, 78(3):391–408, 1980/81. [100](#)
  
- [New02]      Roger G. NEWTON : *Scattering theory of waves and particles*. Dover Publications, Inc., Mineola, NY, 2002. Reprint of the 1982 second edition [Springer, New York ; MR0666397 (84f :81001)], with list of errata prepared for this edition by the author. [28](#), [95](#), [167](#)
  
- [Nic95]      J.-P. NICOLAS : Scattering of linear Dirac fields by a spherically symmetric black hole. *Ann. Inst. H. Poincaré Phys. Théor.*, 62(2):145–179, 1995. [20](#), [43](#), [70](#), [84](#)

- [Ram99] A. G. RAMM : An inverse scattering problem with part of the fixed-energy phase shifts. *Comm. Math. Phys.*, 207(1):231–247, 1999. [28](#), [36](#), [51](#), [97](#), [149](#), [150](#), [167](#)
- [Reg59] T. REGGE : Introduction to complex orbital momenta. *Nuovo Cimento (10)*, 14:951–976, 1959. [27](#), [36](#), [49](#), [95](#), [167](#)
- [Rob28] H. P. ROBERTSON : Bemerkung über separierbare Systeme in der Wellenmechanik. *Math. Ann.*, 98(1):749–752, 1928. [170](#)
- [Rud87] Walter RUDIN : *Real and complex analysis*. McGraw-Hill Book Co., New York, third édition, 1987. [51](#), [97](#)
- [Sal13] Mikko SALO : The Calderón problem on Riemannian manifolds. In *Inverse problems and applications : inside out. II*, volume 60 de *Math. Sci. Res. Inst. Publ.*, pages 167–247. Cambridge Univ. Press, Cambridge, 2013. [13](#), [166](#), [192](#), [193](#)
- [SB05] Antônio SÁ BARRETO : Radiation fields, scattering, and inverse scattering on asymptotically hyperbolic manifolds. *Duke Math. J.*, 129(3):407–480, 2005. [18](#), [24](#), [33](#), [37](#), [166](#), [179](#), [191](#)
- [Sim99] Barry SIMON : A new approach to inverse spectral theory. I. Fundamental formalism. *Ann. of Math. (2)*, 150(3):1029–1057, 1999. [17](#), [32](#), [37](#), [38](#), [55](#), [56](#), [59](#)
- [Stä91] Paul STÄCKEL : *Über die integration der Hamilton-Jacobischen differentialgleichung mittelst separation der variabel*, *Habilitationsschrift*. Teubner, 1891. [23](#), [166](#)
- [Stä93] Paul STÄCKEL : Ueber die Bewegung eines Punktes in einer  $n$ -fachen Mannigfaltigkeit. *Math. Ann.*, 42(4):537–563, 1893. [23](#), [166](#), [169](#)
- [Tes09] Gerald TESCHL : *Mathematical methods in quantum mechanics*, volume 99 de *Graduate Studies in Mathematics*. American Mathematical Society, Providence, RI, 2009. With applications to Schrödinger operators. [17](#), [32](#), [37](#), [196](#)
- [Uhl09] Gunther UHLMANN : Electrical impedance tomography and calderón's problem. *Inverse problems*, 25(12):123011, 2009. [13](#), [166](#), [193](#)

- [Wal84] Robert M. WALD : *General relativity*. University of Chicago Press, Chicago, IL, 1984. [68](#), [84](#)





# Thèse de Doctorat

**Damien GOBIN**

**Étude de problèmes de diffusion inverse à énergie fixée pour des variétés asymptotiquement hyperboliques**

**Inverse scattering problems at fixed energy in asymptotically hyperbolic manifolds**

## Résumé

On étudie des problèmes de diffusion inverse à énergie fixée pour différents types de géométries ayant plus ou moins de symétries. On commence par obtenir un résultat de diffusion inverse local à énergie fixée pour l'équation de Dirac sans masse et sans charge sur des variétés asymptotiquement hyperboliques et à symétrie sphérique. Dans un second chapitre on s'intéresse aux trous noirs de type Reissner-Nordström-de Sitter qui sont des solutions à symétrie sphérique et électriquement chargées de l'équation d'Einstein. On obtient alors un résultat de diffusion inverse à énergie fixée pour l'équation de Dirac massive et chargée. Enfin, on s'intéresse à des variétés de Stäckel de dimension trois ayant la topologie d'un cylindre torique, satisfaisant la condition de Robertson et munies d'une structure asymptotiquement hyperbolique. Sur ces variétés on utilise la théorie de séparation des variables pour l'équation de Helmholtz et une version multivariable de la méthode de Complexification du Moment Angulaire afin d'obtenir un résultat de diffusion inverse à énergie fixée.

## Mots clés

Diffusion inverse, méthode CMA, variétés asymptotiquement hyperboliques, symétrie sphérique, équation de Dirac, trous noirs, variétés de Stäckel, équation de Helmholtz, séparation des variables, fonction de Weyl-Titchmarsh, Théorème de Borg-Marchenko, théorie spectrale.

## Abstract

We study inverse scattering problems at fixed energy for different geometries with more or less symmetries. First, we obtain a local inverse scattering result at fixed energy for the massless and chargeless Dirac equation on asymptotically hyperbolic manifolds with spherical symmetry. In a second chapter, we are interested in Reissner-Nordström-de Sitter black holes which are spherically symmetric and electrically charged solutions of the Einstein equation. We then obtain an inverse scattering result at fixed energy for the massive and charged Dirac equation. Finally, we are interested in Stäckel manifolds of dimension three with the topology of a toric cylinder, satisfying the Robertson condition and endowed with an asymptotically hyperbolic structure. On these manifolds we use the variable separation theory for the Helmholtz equation and a multivariable version of the method of Complexification of the Angular Momentum in order to obtain an inverse scattering result at fixed energy.

## Key Words

Inverse scattering, CAM method, asymptotically hyperbolic manifolds, spherical symmetry, Dirac equation, black holes, Stäckel manifolds, Helmholtz equation, variable separation, Weyl-Titchmarsh function, Borg-Marchenko Theorem, spectral theory.